Complexes

Exercice 1

On utilise simplement la relation $|Z|^2 = Z\,\overline{Z}$. On évitera d'utiliser des formes algébriques.

Géométriquement, on retrouve l'*identité du parallélogramme* : la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des cotés.

Exercice 2

L'inégalité demandée généralise l'inégalité triangulaire. On va la montrer par récurrence SOIGNEUSEMENT, c'est-à-dire en signalant PRECISEMENT la propriété démontrée.

- Pour $n\geq 2$, on définit $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante :

  "Si $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, alors $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$".

  On aura noté que les z_i sont introduits à chaque occurence : on ne part pas d'une famille $z_1, \dots, z_4$ qui servirait pour $\mathcal{P}(2)$, $\mathcal{P}(3)$,… $\mathcal{P}(15)$,…
- $\mathcal{P}(2)$ est vérifiée d'après le cours.
- Supposons $\mathcal{P}(n)$ vérifiée pour un certain $n\geq 2$ (fixé…), et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Pour cela, prenons des complexes $z_1, \dots, z_{n+1}$. En écrivant

  $$z_1 + z_2 + \cdots + z_{n+1} = (z_1 + \cdots + z_n) + z_{n+1}$$

  et en utilisant l'inégalité triangulaire usuelle, on obtient :

  $$|z_1 + z_2 + \cdots + z_{n+1}| \leq |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| + |z_{n+1}|\,.$$

  On peut *maintenant* appliquer $\mathcal{P}(n)$ à la famille $z_1, \dots, z_n$, pour obtenir l'inégalité souhaitée.
- Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout $n\geq 2$.

Pour les cas d'égalité, la condition proposée est facilement suffisante (le vérifier tout de même !). Pour montrer qu'elle est nécessaire, on raisonnera soigneusement (comme toujours…) par récurrence, en utilisant le cas d'égalité prouvé dans le cours.

Exercice 3

On cherche z sous la forme $a+bi$. l'équation proposée est alors équivalente[1] au système $\begin{cases} 12a^2 + 4b^2 - 3 &= 0 \\ ab &= 0 \end{cases}$, ce qui, si on a compris le sens des mots ET et OU, se *résout* en

$$(a = 0 \;\text{ et }\; b^2 = \frac{3}{4}) \;\text{ ou }\; (b = 0 \;\text{ et }\; a^2 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}),$$

de sorte que l'ensemble des solutions est :

$$\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}.$$

Exercice 4

- $(1+i)^{2n} = (2i)^n = 2^n \mathrm{e}^{ni\pi/2}$;
- $1 + j = \mathrm{e}^{i\pi/3}$ (pourquoi ?), donc $(1+j)^{2n} = \mathrm{e}^{2ni\pi/3}$;

[1] après identification des parties réelles et imaginaires des deux membres de l'équation

- $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{1515} = \left(\frac{2\mathrm{e}^{-i\pi/3}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}}\right)^{1515} = \sqrt{2}^{1515}\mathrm{e}^{-i\frac{7.1515}{12}\pi}$, et on peut éventuellement noter que $7.1515 = 24.441 + 21$, donc
$$-\frac{7.1515}{12}\pi \equiv -\frac{21}{12}\pi\ [2\pi] \equiv \frac{3}{12}\pi\ [2\pi],$$
de sorte que $\mathrm{e}^{-i\frac{7.1515}{12}\pi} = \mathrm{e}^{i\pi/4}$;
- en multipliant numérateur et dénominateur par $\cos^2\alpha$, on obtient :
$$\frac{(1+i\tan\alpha)^2}{1+\tan^2\alpha} = \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \mathrm{e}^{2i\alpha};$$
- on reconnait des termes de la forme $1+\mathrm{e}^{i\varphi}$:
$$\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta} = \frac{1+\mathrm{e}^{i(\pi/2-\theta)}}{1+\mathrm{e}^{i(\theta-\pi/2)}} = \frac{2\cos(\pi/4-\theta/2)\mathrm{e}^{i(\pi/4-\theta/2)}}{2\cos(\theta/2-\pi/4)\mathrm{e}^{i(\theta/2-\pi/4)}} = \mathrm{e}^{i(\pi/2-\theta)}.$$

Exercice 5

- Soit $\varphi : z \in \mathbb{U}\setminus\{1\} \mapsto \frac{1+z}{1-z}$: si $z\in\mathbb{U}\setminus\{1\}$, on peut écrire $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\theta \in]0,2\pi[$. On a alors
$$\varphi(z) = \frac{1+\mathrm{e}^{i\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}} = \frac{2\cos\theta/2\mathrm{e}^{i\theta/2}}{2i\sin\theta/2\mathrm{e}^{i\theta/2}} = -i\frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2} = -i\,\mathrm{cotan}\,\frac{\theta}{2}\cdot$$
Ainsi, φ est à valeurs dans $\mathbb{R}i$. Mais par ailleurs, si on prend un élément de $\mathbb{R}i$, disons xi ($x\in\mathbb{R}$), on sait (pourquoi ?) qu'il existe $\rho\in]0,\pi[$ tel que $\mathrm{cotan}\,\rho = x$; on a alors $\varphi(\mathrm{e}^{2i\rho}) = xi$, d'où la surjectivité. Enfin, pour l'injectivité, on suppose que $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$, avec $z_1 = \mathrm{e}^{i\theta_1}$ et $z_2 = \mathrm{e}^{i\theta_2}$, $\theta_1,\theta_2 \in]0,2\pi[$: on a alors $\mathrm{cotan}\,\frac{\theta_1}{2} = \mathrm{cotan}\,\frac{\theta_2}{2}$, donc par injectivité de cotan sur $]0,\pi[$, on obtient $\theta_1=\theta_2$, puis $z_1 = z_2$.
- Le fait que $\psi : x\in\mathbb{R} \mapsto \frac{1+ix}{1-ix}$ soit à valeur dans $\mathbb{U}$ est clair ($\psi(x)$ est de la forme $\frac{z}{\overline{z}}$, donc son module est 1). Par ailleurs, il semble difficile d'avoir $\psi(x) = -1$, de sorte que ψ est en fait à valeurs dans $\mathbb{U}\setminus\{-1\}$.
Maintenant, fixons $Z\in\mathbb{U}\setminus\{-1\}$, et cherchons un éventuel antécédent x par ψ. On peut écrire $Z = \mathrm{e}^{i\theta}$ pour un certain $\theta\in]-\pi,\pi[$, et l'équation $\psi(x) = Z$ *équivaut* après calcul à $x = \tan\frac{\theta}{2}\cdot$ Z admet donc un unique antécédent par ψ, d'où la bijectivité.

Exercice 6

A partir de Moivreries, ou par tout autre moyen, on trouvera comme Maple :
$$\cos 3\theta\sin 6\theta = \sin\theta\big(128\cos^8\theta - 224\cos^6\theta + 120\cos^4\theta - 18\cos^2\theta\big).$$

Exercice 7

Après avoir OBLIGATOIREMENT traité le cas $p=2$ ou/et $p=3$, on voit comment les termes vont se regrouper (en particulier avec le terme central qui reste seul), se qui rend naturel le calcul suivant :
$$\begin{aligned}\cos^{2p}\theta &= \left(\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta})\right)^p = \frac{1}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}\mathrm{C}_{2p}^k\mathrm{e}^{ki\theta}\mathrm{e}^{-(2p-k)i\theta}\\ &= \frac{\mathrm{C}_{2p}^p}{4^p} + \frac{1}{2^{2p}}\Big(\sum_{k=0}^{p-1}\mathrm{C}_{2p}^k\mathrm{e}^{2(k-p)i\theta} + \sum_{r=p+1}^{2p}\mathrm{C}_{2p}^r\mathrm{e}^{2(r-p)i\theta}\Big)\end{aligned}$$
On “retourne” la deuxième somme pour pouvoir regrouper les termes conjugués, en posant $k = 2p-r$:
$$\sum_{r=p+1}^{2p}\mathrm{C}_{2p}^r\mathrm{e}^{2(r-p)i\theta} = \sum_{k=0}^{p-1}\mathrm{C}_{2p}^{2p-k}\mathrm{e}^{2(p-k)i\theta} = \sum_{k=0}^{p-1}\mathrm{C}_{2p}^k\mathrm{e}^{-2(k-p)i\theta},$$

si bien qu'en regroupant les deux sommes, on obtient :

$$\cos^{2p}\theta = \frac{\mathrm{C}_{2p}^{p}}{4^p} + \frac{1}{2^{2p-1}}\sum_{k=0}^{p-1}\mathrm{C}_{2p}^{k}\cos 2(p-k)\theta.$$

Sur le même principe, on trouvera :

$$\cos^{2p+1}\theta = \frac{1}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{p}\mathrm{C}_{2p+1}^{k}\cos(2p+1-2k)\theta,$$

$$\sin^{2p}\theta = \frac{\mathrm{C}_{2p}^{p}}{4^p} + \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\mathrm{C}_{2p}^{k}\cos 2(p-k)\theta,$$

$$\sin^{2p+1}\theta = \frac{1}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\mathrm{C}_{2p+1}^{k}\sin(2p+1-2k)\theta.$$

Exercice 8

La somme demandée est la partie réelle de

$$S = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\mathrm{e}^{ikx} = (1+\mathrm{e}^{ix})^n = \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^n\mathrm{e}^{nix/2},$$

et la somme recherchée est donc $2^n\left(\cos\frac{x}{2}\right)^n\cos\frac{nx}{2}\cdot$

Exercice 9

Notons R l'ensemble des racines de $z^{11}=-1$: il s'agit de l'ensemble des opposés des racines de $z^{11}=1$ (puisque $z^{11}=1$ si et seulement si $(-z)^{11}=-1$. Ainsi, la somme des éléments de R vaut 0.

Si on note $\rho=\mathrm{e}^{i\pi/11}$, on a (justifier) :

$$R=\left\{\rho,\rho^3,\rho^5,\rho^7,\rho^9,-1,\rho^{13},\rho^{15},\rho^{17},\rho^{19},\rho^{21}\right\}.$$

La somme des parties réelles de ces termes vaut d'une part 0, et d'autre part $-1+2S$, où S est la somme demandée (faire un dessin...), de sorte que $2S-1=0$ puis $S=\frac{1}{2}\cdot$

Exercice 10

On applique la méthode vue en cours, et on trouve comme Maple :

- pour $2+i$: $\sqrt{1+\frac{\sqrt{5}}{2}}+i\sqrt{-1+\frac{\sqrt{5}}{2}}$ et son opposé ;
- pour $4i-3$: $1+2i$ et $-1-2i$;
- pour $8i-15$: $1+4i$ et $-1-4i$;
- pour $9+40i$: $5+4i$ et $-5-4i$.

Exercice 11

Il y avait manifestement (cf feuille Maple jointe) une erreur d'énoncé : il fallait lire $27(z-i)^6-(z+i)^6=0$.

$-i$ n'étant pas solution, l'équation est équivalente à $\left(\sqrt{3}\frac{z-i}{z+i}\right)^6=1$. Or, pour chacun des éléments ω de $\mathbb{U}_6$, l'équation $\sqrt{3}\frac{z-i}{z+i}=\omega$ admet exactement une solution, à savoir $i\frac{1+\sqrt{3}\omega}{1-\sqrt{3}\omega}\cdot$

Pour obtenir les mêmes résultats que Maple, il reste à calculer un peu, sachant que les éléments de $\mathbb{U}_6$ ont une expression algébrique simple...

Exercice 12

Commençons par chercher la solution imaginaire pure sous la forme $z = \lambda i$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. L'équation devient :

$$-i(i-1)\lambda^3 + (5i-11)\lambda^2 - (43+i)\lambda i + 9 + 37i = 0,$$

soit encore $\begin{cases} \lambda^3 - 11\lambda^2 + \lambda + 9 & = & 0 \\ \lambda^3 + 5\lambda^2 - 43\lambda + 37 & = & 0 \end{cases}$ ce qui est équivalent à : $\begin{cases} \lambda^3 - 11\lambda^2 + \lambda + 9 & = & 0 \\ 4\lambda^2 - 11\lambda + 7 & = & 0 \end{cases}$, soit encore $\begin{cases} \lambda^3 - 11\lambda^2 + \lambda + 9 \\ \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = \frac{7}{4} \end{cases}$, et finalement, $\lambda = 1$ est une solution (on n'a pas envie de vérifier pour $\frac{7}{4}$).

Il reste à écrire (pourquoi et comment ?) :

$$\begin{aligned} (i-1)z^3 - (5i-11)z^2 & - (43+i)z + 9 + 37i \\ & = (z-i)\big((i-1)z^2 + (10-6i)z + 9i - 37\big) \\ & = (i-1)(z-i)\big(z^2 - (8+2i)z + 23 + 14i\big) \\ & = (i-1)(z-i)\big(z - (5-2i)\big)\big(z - (3+4i)\big). \end{aligned}$$

Exercice 13

- $z = 1$ n'étant manifestement pas solution, on recherche l'ensemble des $z \neq 1$ tels que $\dfrac{z^5-1}{z-1} = 0$: il s'agit de :

  $$\mathbb{U}_5 \setminus \{1\} = \{\omega, \omega^2, \omega^3 = \overline{\omega^2}, \omega^4 = \overline{\omega}\},$$

  avec $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/5}$.
- Si z est une des solutions précédentes, on a $z \neq 0$, ce qui permet d'écrire :

  $$z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0,$$

  soit encore avec $x = z + 1/z$: $x^2 + x - 1 = 0$.
- Si en particulier on prend $z = \omega$, on a alors $x = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$ qui est l'une des racines de $x^2 + x - 1 = 0$, c'est-à-dire $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\cdot$ Comme par ailleurs $0 < \dfrac{2\pi}{5} < \dfrac{\pi}{2}$, on a $2\cos\dfrac{2\pi}{5} > 0$, de sorte que :

  $$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\cdot$$

Exercice 14

Une résolution PROPRE du système (c'est-à-dire avec pivot de Gauss) permet de montrer (comme Maple) qu'il existe une unique solution, à savoir

$$\begin{cases} x & = & \frac{1}{3}\big(a+b+c\big) \\ y & = & \frac{1}{3}\big(a+j^2b+jc\big) \\ z & = & \frac{1}{3}\big(a+jb+j^2c\big) \end{cases}$$

Puisque $a, b, c \in \mathbb{R}$, ces solutions sont réelles si et seulement si $j^2b + jc$ et $jb + j^2c$ le sont, ce qui revient à dire (prendre les parties imaginaires) : $b = c$.

Exercice 15

Tout d'abord, il existe un unique point Ω tel que $\Omega A = \Omega B$ et $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On le prouve par analyse géométrique classique de la situation : ce point est NECESSAIREMENT situé sur la médiatrice de

$[AB]$, et sur la droite passant par A, et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ (triangle $AB\Omega$ isocèle...). RECIPROQUEMENT, ces deux droites s'intersectent effectivement en un point Ω, qui vérifie alors les conditions.

Maintenant, $\arg \dfrac{z-2}{z+i} = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ est équivalent à $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$. On sait alors que si $\mathcal{C}$ désigne le cercle de centre Ω et passant par A et B, on a :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}\ [\pi] \quad \Longleftrightarrow \quad M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}.$$

Si on écrit $\mathcal{C} = \{A, B\} \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, où $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont les deux arcs de $\mathcal{C}$ reliant A et B, les $M \in \mathcal{A}_1$ sont ceux vérifiant $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$, et ceux de $\mathcal{A}_2$ sont cuex vérifiant $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$. Le lieu recherché est donc $\mathcal{A}_1$.