Systèmes linéaires, déterminants

EXERCICE 1 En cas de baisse d'activité dans la classe, on sera amené à :
Inverser la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 2 Résoudre le système suivant, où m est un paramètre réel :

$$\begin{cases} x+y+mz=m \\ x+y-z=1 \\ x+my-z=1 \end{cases}$$

EXERCICE 3 Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ canoniquement associées aux matrices suivantes (on a le droit de réfléchir avant de se lancer dans des calculs...) :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 4 Donner le rang des matrices suivantes, et, le cas échéant, les inverser.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 5 A quelle condition la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 \\ 1 & \cos\theta_3 & \cos 2\theta_3 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 6 On fixe un point A du plan et un vecteur (de $\mathbb{R}^2$). Déterminer les lignes de niveaux de $\varphi : M \mapsto \det_{\mathcal{E}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM})$.
Il s'agit du déterminant dans la base canonique, et on recherche, à K fixé, l'ensemble des M tels que $\varphi(M)=K$.

EXERCICE 7 Soit $a \in \mathbb{C}$. Résoudre (sur $\mathbb{C}$) le système 3-3 :

$$\begin{cases} 2(a-1)x & + & 2y & - & z & = & 2(a+1) \\ 2x & + & 2ay & + & 2z & = & 4a^2+3 \\ 4ax & + & 2(2a+1)y & + & (2a+1)z & = & 16a^3-2a^2-a+5 \end{cases}$$

On commencera par calculer SOUS UNE FORME FACTORISEE le déterminant de la matrice associée à ce système.

Exercice 8 Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ($n \geq 2$). On s'intéresse au déterminant de Vandermonde :

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. Montrer que si deux λ_i sont égaux, alors $V_n = 0$.
2. Calculer V_2 et V_3 (factoriser) ; proposer une formule pour V_n !
3. On pose : $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_{n-1})$. Développer P, et remplacer la dernière ligne de V_n par une CL bien choisie pour obtenir V_n en fonction de V_{n-1}.
4. Conclure.
5. Autre point de vue : on pourra remplacer la dernière colonne par ${}^t(1\ \lambda\ \lambda^2 \dots \lambda^n)$ et montrer qu'on obtient une expression polynômiale (en λ) de degré $n-1$ et ayant pour racines $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$.

Exercice 9 Soit A une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (ce qui signifie que toutes les composantes sont des applications de classe $\mathcal{C}^1$). On note $A(t) = \big(C_1(t) | \dots | C_n(t)\big)$.

1. Montrer que $\varphi : t \mapsto \det A(t)$ est dérivable, et calculer sa dérivée.
2. Application : calculer $\begin{vmatrix} 1+x & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 1+x \end{vmatrix}$.
   Notons qu'en faisant l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + \cdot + L_n$ et avec deux petites manipulations supplémentaires, on retrouve le même résultat.

Exercice 10 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \dots 0 & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

Exercice 11 Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \dots & 0 \\ a & a+b & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+b & b \\ 0 & \dots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 12 Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Mettre sous forme simple (produits de termes linéaires) le déterminant de :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}.$$