# Continuité des fonctions numériques d'une variable réelle

## Table des matières

*Le cauchemar d'un mathématicien, c'est une suite $(\varepsilon_n)$ qui tend vers l'infini quand $n$ tend vers zéro.*

# 1 Généralités

## 1.1 Du vocabulaire

*"Les dessins sont autorisés"...*

DÉFINITION 1

- Si $f$ est une application de $D$ dans $\mathbb{R}$, $f^+$ (resp. $f^-$) désigne l'application de $D$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f^+(t) = \mathrm{Max}\big(f(t), 0\big)$ (resp. $f^-(t) = -\mathrm{Min}\big(0, f(t)\big)$ ).
- On note $f \leq g$ (resp. $f < g$) lorsque pour tout $x \in D$, on a $f(x) \leq g(x)$ (resp. $f(x) < g(x)$ ). BIEN ENTENDU, si $f$ et $g$ sont données, on n'a pas forcément l'une des deux relations $f \leq g$ ou $g \leq f$ (exemple ?).
- La borne supérieure de $f$ sur $D$, notée $\mathop{\mathrm{Sup}}\limits_{D} f$ ou bien $\mathop{\mathrm{Sup}}\limits_{x \in D} f(x)$ est la borne supérieure, si elle existe, de $\{f(x) \mid x \in D\}$. Si cet ensemble n'est pas majoré, on note $\mathop{\mathrm{Sup}}\limits_{D} f = +\infty$.
- Le maximum de $f$ sur $D$ est, **s'il existe**, le maximum de $\{f(x) \mid x \in D\}$. On le note $\mathop{\mathrm{Max}}\limits_{D} f$ ou bien $\mathop{\mathrm{Max}}\limits_{x \in D} f(x)$.
- On dit que $f$ admet en $a$ un *maximum local* s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in D \cap ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, $f(x) \leq f(a)$.
- On dit que $f$ admet en $a$ un *maximum local strict* s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in D \cap ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ différent de $a$, on a $f(x) < f(a)$.
- On dit que $f$ admet en $a$ un *maximum global* si $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in D$. $f$ admet alors un maximum sur $D$, qui vaut $f(a)$. On dit que le maximum est pris en $a$. Il peut d'ailleurs être pris en plusieurs points (exemple ?).
- On dit que $f$ admet en $a$ un *maximum global strict* si $f(x) < f(a)$ pour tout $x \in D$ différent de $a$. $f$ admet alors sur $D$ un maximum, pris *uniquement* (pourquoi ?) en $a$.

REMARQUES 1

- On a $f^+$ et $f^-$ positives (au sens large), avec $f = f^+ - f^-$.
- Le maximum d'une fonction quelconque définie sur un ensemble quelconque $D$ n'existe pas toujours, par contre on peut toujours parler de $\mathop{\mathrm{Sup}}\limits_{D} f$, qui est un élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

EXERCICE 1 *Donner trois exemples* de natures différentes *de fonctions n'admettant pas de maximum.*

EXERCICE 2 *Si $f$ et $g$ sont définies sur $I$, montrer :*

$$\mathop{\mathrm{Sup}}\limits_{I}(f+g) \leq \mathop{\mathrm{Sup}}\limits_{I} f + \mathop{\mathrm{Sup}}\limits_{I} g.$$

*Donner un exemple où l'inégalité est stricte.*

## 1.2 Monotonie

DÉFINITION 2

- $f$ est dite *croissante* (resp. *décroissante*) lorsque pour tout $x, y \in D$ tels que $x < y$, on a $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) \geq f(y)$). On note $f \nearrow$ (resp. $f \searrow$).
- $f$ est dite *strictement croissante* (resp. *strictement décroissante*) lorsque pour tout $x, y \in D$ tels que $x < y$, on a $f(x) < f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$). On note $f \nearrow\!\!\nearrow$ (resp. $f \searrow\!\!\searrow$).
- $f$ est dite *monotone* (resp. *strictement monotone*) lorsque $f$ est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

EXERCICE 3 *Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Que dire de $g \circ f$ lorsque :*

- *$f$ et $g$ sont croissantes ;*
- *$f$ et $g$ sont strictement croissantes ;*
- *$f$ est croissante et $g$ strictement croissante ;*
- *$f$ est strictement décroissante et $g$ croissante.*

Remarques 2
- Dans le cas où la fonction n'est pas définie sur un intervalle mais par exemple sur la réunion de deux intervalles $I_1$ et $I_2$, on peut très bien avoir $f$ monotone sur $I_1$ et sur $I_2$ sans avoir $f$ monotone sur $I_1 \cup I_2$. Inutile de chercher un exemple tordu : considérer l'application $t \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{t}\cdot$
- Si $f$ et $g$ sont croissantes (ou décroissantes), ON NE SAIT RIEN A PRIORI de la monotonie du produit $fg$ (vérifier sur des exemples).
- Pour montrer des résultats élémentaires sur la monotonie, **il est inutile de dériver !** (d'ailleurs, on n'a pas toujours le droit...) Cela dit, si on a aucune idée du résultat, on peut déjà regarder ce qui se passe dans le cas de fonctions dérivables.

### 1.3 Parité

On suppose $f$ définie sur un domaine symétrique par rapport à 0. SI CETTE CONDITION N'EST PAS VERIFIEE, LA PARITE EST UNE NOTION CREUSE : INUTILE DE PERDRE DU TEMPS EN LE PRECISANT A CHAQUE FOIS.

Définition 3
$f$ est dite paire (resp. impaire) si pour tout $x \in D$, on a $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$ ).

Exemple 1 *L'application $t \mapsto t^n$ est de la parité de $n$. L'application* cos *est paire et l'application* sin *est impaire.*

Proposition 1 *Si $f$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique couple d'applications $(f_1, f_2)$ telles que $f_1$ est paire, $f_2$ est impaire, et $f = f_1 + f_2$. $f_1$ (resp. $f_2$) est la partie* paire *(resp.* impaire*) de $f$.*

Preuve : On commence par chercher les formes NECESSAIRES de $f_1$ et $f_2$. On obtient alors l'unicité d'une EVENTUELLE solution $(f_1, f_2)$. Dans un deuxième temps, il n'y a qu'à VERIFIER qu'en prenant pour $f_1$ et $f_2$ ce qu'on a trouvé avant, on obtient EFFECTIVEMENT une solution au problème initial. ■

Le type de raisonnement précédent doit être bien compris : il faut passer du temps dessus (si cela n'a pas été fait en terminale).

Exemple 2 *Si $f$ est la fonction $t \mapsto e^t$, sa partie paire s'appelle la fonction* cosinus hyperbolique*, notée* ch*, ou (en particulier pour Maple)* cosh *; sa partie impaire s'appelle la fonction* sinus hyperbolique*, notée* sh *ou* sinh.

### 1.4 Fonctions lipschitziennes

Définition 4
Soit $K > 0$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite :
- $K$-lipschitzienne sur $I$ lorsque :

$$\forall x, y \in I, \qquad |f(x) - f(y)| \leq K\, |x - y|\,.$$

- lipschitzienne si elle est $K$-lipschitzienne pour un certain $K > 0$.

Exercice 4 *Montrer que si $f$ est $K$-lipschtzienne sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, alors $f$ est $K$-lipshitzienne sur $[a, c]$.*

*Le résultat reste-t-il exact si $f$ est $K$-lipschitzienne sur $[a, b]$ et $]b, c]$ ?*

### 1.5 Notion de voisinage

Certaines propriétés des suites sont intéressantes même si elles ne sont vérifiées qu'à partir d'un certain rang. De même, les fonctions d'une variable réelle peuvent vérifier certaines propriétés "au voisinage d'un réel", ou bien "au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$".

Exemple 3 *"$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée au voisinage de 1" signifie :*

$$\exists \rho > 0,\ \exists M \in \mathbb{R};\ \forall x \in ]1-\rho, 1+\rho[, \qquad |f(x)| \leq M.$$

Exemple 4 *"$f$ prend des valeurs strictement négatives au voisinage de $-\infty$" signifie :*

$$\exists M \in \mathbb{R};\ \forall x \leq M, \qquad f(x) < 0.$$

Exercice 5 *Donner un exemple de fonction $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ strictement négative et décroissante au voisinage de 0, mais strictement positive et décroissante au voisinage de $+\infty$ (on se contentera d'esquisser un graphe).*

## 2 Limite d'une fonction, continuité

On va donner un sens à : $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$, lorsque $a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, avec $f$ définie sur un domaine $D$ tel que $a$ est dans $D$ ou "au bord de $D$". *Concrètement*, si $D$ est un intervalle non majoré, $+\infty$ est au bord de $D$ alors que si $D$ est un intervalle ouvert en $\alpha$ (de la forme $]\alpha, \ldots]$) alors $\alpha$ est au bord de $D$. Lorsque $D$ n'est pas un intervalle, ce sera une réunion finie d'intervalles disjoints (par exemple, $\mathbb{R}^*$).

### 2.1 Limite en un point de $\overline{\mathbb{R}}$

A priori, on a 9 définitions à donner... Nous n'en donnerons que 4. Lorsque celles-ci sont comprises[1], les autres s'en déduisent.

Le lecteur est invité à ne pas se reporter aux *livres des anciens*, dans lesquels la définition des limites est différente (on n'y tient pas compte du point en lequel on prend la limite).

Définition 5
Soit $f$ définie sur $D$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, avec $a$ élément ou au bord de $D$. On dit que $f(x)$ tend vers $b$ lorsque $x$ tend vers $a$, et on note $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ ou bien[2] $f \underset{a}{\longrightarrow} b$ lorsque :

- $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0;\ \forall x \in D, \qquad |x-a| \leq \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - b| \leq \varepsilon.$$
- $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$ :
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0;\ \forall x \in D, \qquad |x-a| \leq \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \geq M.$$
- $a = +\infty$, $b = +\infty$ :
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R};\ \forall x \in D, \qquad x \geq A \ \Rightarrow\ f(x) \geq M.$$
- $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$ :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R};\ \forall x \in D, \qquad x \leq A \ \Rightarrow\ |f(x) - b| \leq \varepsilon.$$

Remarques 3

- On montrera sans mal que lorsque $b \in \mathbb{R}$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ si et seulement si $f(x) - b \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
- De même, si $a \in \mathbb{R}$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ si et seulement si $f(a+h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} b$.

[1] non, il ne s'agit pas d'un lapsus : c'est bien *comprises* qui est écrit, et non *apprises*...
[2] mais pas un mélange des deux notations, qui m'agace un peu, mais **surtout** qui laisse Maple perplexe...

- Si $f \underset{a}{\longrightarrow} +\infty$, alors $f$ ne peut pas être définie en $a$ (pourquoi ?), donc $a \notin D$.

EXERCICE 6 *Dans le cas $a, b \in \mathbb{R}$, observer ce qui se passe si on inverse l'ordre de $\forall \varepsilon > 0$ et de $\exists \alpha > 0$ dans la définition de la limite, et en déduire qu'il s'agirait d'une définition grotesque (et non pas "presque correcte").*

PROPOSITION 2 Unicité de la limite
*Si $f \underset{a}{\longrightarrow} l_1$ et $f \underset{a}{\longrightarrow} l_2$, alors $l_1 = l_2$. On peut alors noter $\lim_a f = l_1$.*

REMARQUE 4 Si $f$ admet une limite en $a \in D$, on peut **directement** montrer que cette limite vaut $f(a)$.

DÉFINITION 6
Une fonction est *continue* en un point de son domaine de définition si elle admet une limite en ce point.

REMARQUES 5
- Avec les termes de l'ancien programme concernant la limite, on définissait la continuité en $a$ par le fait que $f$ admettait une limite en $a$ et que cette limite valait $f(a)$ (certains ont peut-être vu cette définition en terminale). Ici, le problème ne se pose pas puisque, lorsqu'elle existe, **la limite vaut toujours** $f(a)$.
- Notons le *caractère local* de la continuité : la continuité de $f$ en $a$ est indépendante des valeurs de $f$ sur $[a+1, +\infty[$, ou encore $[a + \frac{1}{1000!}, a+1]$ ...

EXERCICE 7 *Montrer que si $f$ est une fonction lipschitzienne, alors $f$ est continue en tout point.*

EXERCICE 8 *Montrer que $f : x{\geq}0 \mapsto \sqrt{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^+$. Si $a > 0$, on pourra montrer que $f$ est lipschitzienne sur $[\frac{a}{2}, +\infty[$, alors que pour la continuité en $0$, on pourra "travailler en $\varepsilon$".*

### 2.2 Limites à droite et à gauche

DÉFINITION 7
- $f : D \to \mathbb{R}$ admet une limite à droite (resp. à gauche) en $a$ si $f|_{D\cap]a,+\infty[}$ (resp. $f|_{D\cap]-\infty,a[}$) admet une limite en $a$. Si elle existe, cette limite $l$ est unique, et notée $f(a^+)$ ou $\lim_{a^+} f$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x)$ (resp. $f(a^-)$ ou $\lim_{a^-} f$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x)$ ). On notera également (et de préférence) : $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} l$.
- $f$ est continue à droite (resp. gauche) en $a \in D$ si $f$ admet une limite à droite en $a$, **et que cette limite vaut** $f(a)$.

PROPOSITION 3 *$f$ admet une limite en $a$ si et seulement si $f$ admet une limite à droite et à gauche, et si ces limites sont égales à $f(a)$.*

REMARQUE 6 Si $f$ n'est pas définie en $a$ (i.e. : $a \notin D$), $f$ admet une limite en $a$ si et seulement si elle admet deux limites à droites et à gauches, qui sont égales. Par contre, la continuité de $f$ en un tel point n'a pas de sens (tant que $f$ n'a pas été prolongée en $a$).

EXEMPLE 5 *La fonction* partie entière *$E$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$. Cette fonction est continue à droite en tout entier $n \in \mathbb{Z}$, mais admet en ce point une limite à gauche distincte de $E(n)$.*

## 2.3 Opérations sur les limites

Les résultats qui suivent sont naturels, et sont surtout l'occasion de faire des preuves "en $\varepsilon$". Ils sont de même nature que ceux vus pour les suites. On commence par trois résultats préliminaires :

LEMME 1

- *Si* $|f| \leq g$ *au voisinage de* $a$ *et* $g \underset{a}{\longrightarrow} 0$, *alors* $f \underset{a}{\longrightarrow} 0$.
- *Si* $f \underset{a}{\longrightarrow} b \in \mathbb{R}$, *alors* $f$ *est bornée au voisinage de* $a$.
- *Si* $f \underset{a}{\longrightarrow} b > 0$, *alors il existe* $m > 0$ *tel qu'au voisinage de* $a$, *on a* $f \geq m$.

PREUVE : Bon exercice d'entrainement pour le taupin ; bonne question de cours pour le khôlleur... On distinguera bien entendu les cas où $a \in \mathbb{R}$ et $a \in \{-\infty, +\infty\}$. ■

Les deux résultats qui suivent seront utiles dans le théorème à venir.

PROPOSITION 4

- *Si* $f \underset{a}{\longrightarrow} 0$, $g \underset{a}{\longrightarrow} 0$, *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors* $f + g \underset{a}{\longrightarrow} 0$ *et* $\lambda f \underset{a}{\longrightarrow} 0$.
- *Si* $f \underset{a}{\longrightarrow} 0$ *et* $g$ *est bornée au voisinage de* $a$, *alors* $fg \underset{a}{\longrightarrow} 0$.

THÉORÈME 1 *Si* $f \underset{a}{\longrightarrow} l_1$ *et* $g \underset{a}{\longrightarrow} l_2$, *on résume dans ce qui suit les comportements possibles de* $\lambda f$, $f + g$, $fg$ *et* $\dfrac{1}{f}$ *en fonction de* $l_1$ *et* $l_2$.

- *Si* $l_1 \in \mathbb{R}$, *alors* $\lambda f \underset{a}{\longrightarrow} \lambda l_1$. *Dans le cas où* $l \in \{-\infty, +\infty\}$, *on distingue selon le signe (strict) de* $\lambda$, *le (difficile) cas* $\lambda = 0$ *étant laissé au lecteur :*

| $\lambda$ \ $l_1$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|
| $> 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $< 0$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

*Limite de* $\lambda f$ *en* $a$, *lorsque* $l_1 \notin \mathbb{R}$ *et* $\lambda \neq 0$.

- *Dans le tableau suivant, les "?" signifient "il y a plusieurs comportements possibles" : le lecteurs donnera des exemples significatifs.*

| $l_1$ \ $l_2$ | $\in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\in \mathbb{R}$ | $l_1 + l_2$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | ? |
| $-\infty$ | $-\infty$ | ? | $-\infty$ |

*Limite de* $f + g$ *en* $a$.

- *Pour la limite éventuelle de* $fg$ *en* $a$, *on peut avoir conflit entre une limite nulle et une limite infinie. Dans ce cas, on peut obtenir une limite finie, infinie, ou pas de limite du tout : exhiber de tels cas.*

| $l_1$ \ $l_2$ | $-\infty$ | $\in \mathbb{R}_-^*$ | $0$ | $\in \mathbb{R}_+^*$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | ? | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\in \mathbb{R}_-^*$ | $+\infty$ | $l_1 l_2$ | $0$ | $l_1 l_2$ | $-\infty$ |
| $0$ | ? | $0$ | $0$ | $0$ | ? |
| $\in \mathbb{R}_+^*$ | $-\infty$ | $l_1 l_2$ | $0$ | $l_1 l_2$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | ? | $+\infty$ | $+\infty$ |

*Limite de* $fg$ *en* $a$.

- *Enfin,* $\dfrac{1}{f}$ *peut admettre ou non une limite en* $a$ *selon la valeur de* $l_1$.

| $l_1$ | $-\infty$ | $\in \mathbb{R}_-^*$ | $0^-$ | $0$ | $0^+$ | $\in \mathbb{R}_+^*$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_a \dfrac{1}{f}$ | $0$ | $\dfrac{1}{l_1}$ | $-\infty$ | ? | $+\infty$ | $\dfrac{1}{l_1}$ | $0$ |

*Limite de $\frac{1}{f}$ en a.*

*Dans le tableau précédent, $l_1 = 0^+$ signifie : $f \underset{a}{\longrightarrow} 0$, avec $f > 0$ au voisinage de $a$.*

Preuve : La plupart des preuves se feront "sans $\varepsilon$" grâce aux résultats préliminaires. ■

Corollaire 1 *Si $f$ et $g$ sont continues en $a$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g$ et $fg$ sont continues en $a$. De même, si $f$ est continue en $a$ et $f(a) > 0$, alors $\frac{1}{f}$ est à valeurs non nulles au voisinage de $a$, et $\frac{1}{f}$ (qui est donc définie au voisinage de $a$) est continue en $a$.*

Preuve : Voir la définition de la continuité... ■

## 2.4 Limites et ordre

Théorème 2 Passage des inégalités **LARGES** à la limites

- *Si $f \geq c$ au voisinage de $a$ ($c$ est un réel fixé) et $f \underset{a}{\longrightarrow} b$, alors $b \geq c$.*
- *Si $f \leq g$ au voisinage de $a$, avec $f \underset{a}{\longrightarrow} l_1$ et $g \underset{b}{\longrightarrow} l_2$, alors $l_1 \leq l_2$.*

Bien entendu, le premier cas peut être vu comme un cas particulier du second ... mais en fait, pour la preuve, on montrera d'abord le premier cas (par l'absurde), puis on considerera $g - f$.

Théorème 3 Théorème des (du) gendarme(s)

- *Si $g \leq f \leq h$ au voisinage de $a$ et $g, h \underset{a}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, alors $f \underset{a}{\longrightarrow} l$.*
- *Si $f \leq g$ au voisinage de $a$ et $f \underset{a}{\longrightarrow} +\infty$, alors $g \underset{a}{\longrightarrow} +\infty$.*

## 2.5 Composition des limites

Théorème 4 fonction-fonction

*Si $f(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} b$ et $g(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} c$, alors $(g \circ f)(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} c$.*

Preuve : Faire un ou deux des 27 cas... ■

Remarque 7 Dans l'énoncé précédent, $a$, $b$ et $c$ peuvent même être de la forme $\alpha^+$ ou $\alpha^-$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ : il y avait donc 125 cas...

Corollaire 2 *Si $f$ est continue en $a$ et $g$ est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en $a$.*

Théorème 5 fonction-suite

*Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$ et $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$, alors $f(u_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} b$.*

Corollaire 3 *Si $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l$ et $f$ est continue en $l$, alors $f(u_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(l)$.*

Remarques 8

- Ce résultat est en particulier utile pour prouver (par l'absurde) la discontinuité d'une fonction $f$ en un point $a$ : on exhibe UNE suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$ mais $f(u_n) \not\to f(a)$.
- On peut préciser le résultat précédent : en fait, $f$ est continue en $a$ si et seulement si pour toute suite $u$ tendant vers $a$, on a $f(u_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(a)$. On parle de *caractérisation séquentielle de la continuité*. Cette réciproque du théorème précédent est hors programme, mais constitue un résultat intéressant et de preuve tout à fait abordable... laissée au lecteur (qui pourra l'établir par l'absurde).

### 2.6 Limite monotone

On donne ici un analogue continu du théorème de convergence croissante des suites réelles.

THÉORÈME 6 *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de la forme $[\alpha, \beta[$ ou $]\alpha, \beta[$, avec $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f$ croissante au voisinage de $\beta$. Alors :*
- *ou bien $f$ est majorée, et alors $f$ admet une limite finie en $\beta$ ;*
- *ou bien $f$ tend vers $+\infty$ en $\beta$.*

*(dans les deux cas, il s'agit de limites à gauche si $\beta \in \mathbb{R}$).*

PREUVE : Même chose que pour les suites... ■

REMARQUE 9 Le lecteur énoncera et prouvera les trois autres théorèmes “associés” : d'abord, le cas où $f$ est croissante à droite de $\alpha$, puis le cas où $f$ est décroissante à gauche de $\beta$ et à droite de $\alpha$.

PROPOSITION 5 *Si $f$ est définie et croissante au voisinage de $a$, avec $a$ intérieur à $D$*[3]*, alors $f$ admet une limite à droite et à gauche en $a$, avec $\lim\limits_{a^-} f \leq f(a) \leq \lim\limits_{a^+} f$.*

REMARQUE 10 Quand l'existence d'une limite (à droite par exemple) est acquise, on peut obtenir l'inégalité $f(a) \leq f(a^+)$ en considérant l'inégalité valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $f(a) \leq f(a + \frac{1}{n})$, puis en faisant tendre $n$ vers $+\infty$ dans cette inégalité.

## 3 Propriétés globales des fonctions continues

### 3.1 L'algèbre $\mathcal{C}(I)$

DÉFINITION 8
Si $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}(I)$ désigne l'ensemble des applications de $I$ dans $\mathbb{R}$ continues en tout point de $I$.

La proposition suivante regroupe des résultats qui sont conséquences simples du caractère local de la continuité, et des résultats de la partie précédente.

PROPOSITION 6
- *Si $f, g \in \mathcal{C}(I)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g$ et $fg$ sont dans $\mathcal{C}(I)$. On dit que $\mathcal{C}(I)$ est une algèbre.*
- *Si $f$ est à valeurs non nulles, alors $\dfrac{1}{f}$ est également dans $\mathcal{C}(I)$.*
- *Si $f \in \mathcal{C}(I)$ est à valeurs dans $J$ et $g \in \mathcal{C}(J)$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}(I)$.*
- *Si $f, g \in \mathcal{C}(I)$, alors $|f|$, $\mathrm{Max}(f, g)$ et $f^+$ sont dans $\mathcal{C}(I)$.*

PREUVE : Pour $g \circ f$, on “compose les limites”, et pour $|f|$, on considère l'application $g : x \mapsto |x|$. ■

Pour comprendre le problème de la continuité des restrictions/prolongements de $f$ vis-à-vis de la continuité de $f$, on commencera par traiter l'exercice suivant.

EXERCICE 9 *Soit $g$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1$ si $x \in [0, 1[$, et $g(x) = 0$ sinon. Soit également $f$ la restriction de $g$ à $[0, 1]$.*

*Discuter la continuité de $g$ en $a \in \mathbb{R}$ et $f$ en $b \in [0, 1]$.*

PROPOSITION 7 Continuité des restrictions et prolongements
- *Si $f \in \mathcal{C}(I)$ et $J \subset I$, alors $f|_J \in \mathcal{C}(J)$.*
- *Si $J \subset I$ et $f|_J$ est continue en $x_0 \in J$, alors $f$ n'est pas forcément continue en $x_0$ (donner un contre-exemple). Cependant, si $x_0$ est un point intérieur à $J$, alors $f$ est continue en $x_0$.*

[3] ce qui signifie qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $[a - \lambda, a + \lambda] \subset D$

- *Si $a < b < c$, $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ admet des restrictions à $[a, b]$ et $[b, c]$ continues, alors $f \in \mathcal{C}([a, b])$.*
- *Si $I = ]a, b]$, et si $f \in \mathcal{C}(I)$ admet une limite finie $l$ en $a$, alors l'application $x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x > a \\ l & \text{sinon} \end{cases}$ est un prolongement de $f$ continu sur $[a, b]$. C'est même l'*unique *prolongement continu.*

PREUVE : Bien utiliser le caractère local de la continuité. ■

## 3.2 Image d'un intervalle

THÉORÈME 7 Théorème des valeurs intermédiaires
*Si $f$ est continue sur $[a, b]$ et $\gamma$ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $\gamma = f(c)$.*

PREUVE : (HP) On se ramènera au cas où $f(a) < \gamma = 0 < f(b)$, et on pourra raisonner par dichotomie, ou bien considérer la borne supérieure de l'ensemble des $x \in [a, b]$ tels que $f(t) \leq 0$ pour tout $t \in [a, x]$. ■

Le corollaire qui suit est une *reformulation* efficace du théorème des valeurs intermédiaires.

COROLLAIRE 4 *Si $f$ est continue sur un intervalle $I$, alors $f(I)$ est un intervalle.*

L'exercice suivant est un classique parmi les classiques taupinaux.

EXERCICE 10 *Soit $f$ une application continue de $[0, 1]$ dans lui-même, alors $f$ admet un point fixe.*

Le résultat suivant est une conséquence simple du TVI, et est souvent utilisé dans les interprétations de tableaux de variations.

PROPOSITION 8 *Si $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante, et tend vers $l$ en $b$, alors $f$ est une bijection de $[a, b[$ sur $[f(a), l[$.*

REMARQUE 11 Lorsqu'on dresse un tableau de variation d'une fonction, le TVI et le résultat précédent permettent de "lire" sur le tableau les différentes bijections induites par $f$, et par exemple la localisation des solutions de $f(x) = 0$. Si, pas plus qu'un dessin, le tableau de variation ne constitue une *preuve* de quoi que ce soit, il est tout de même **indispensable** de le dresser, et **criminel** d'interdire de le dresser (sous le prétexte fallacieux d'être rigoureux). On peut en effet difficilement prouver un résultat que l'on ne *voit* pas... On comprendra donc que l'absence de tableaux de variations dans mes corrigés n'est pas d'origine idéologique, mais typographique...

## 3.3 Image d'un segment

THÉORÈME 8 *Si $I$ est un segment et $f \in \mathcal{C}(I)$, alors $f$ admet un maximum et un minimum globaux.*

PREUVE : (HP) On pourra approcher la borne supérieure avec des $f(x_n)$, puis extraire grâce au théorème de Bolzano Weierstraß, ou bien travailler par dichotomie, en prenant des intervalles emboités (de plus en plus petits) sur lesquels la borne supérieure de $f$ vaut $\operatorname{Sup}_I f$. ■

EXERCICE 11 *Exhiber des contre-exemples, en enlevant une seule des trois hypothèses continuité-fermé-borné.*

Ici encore, on peut reformuler le théorème de façon synthétique :

COROLLAIRE 5 *Si $f$ est continue sur un segment $I$, alors $f(I)$ est un segment.*

### 3.4 Homéomorphismes

Tout d'abord, il faut bien comprendre que si $f$ est une application continue bijective, alors la fonction réciproque de $f$ n'a *a priori* aucune raison d'être continue.

Exercice 12 *Trouver* $f : [0,1] \cup ]2,3] \to \mathbb{R}$ *continue induisant une bijection sur son image, mais telle que la bijection réciproque n'est pas continue.*

Définition 9
Un *homéomorphisme* est une application $f$ bijective, continue, avec $f^{-1}$ continue.

Le résultat suivant est intrinsèquement lié au caractère ordonné de $\mathbb{R}$ : si la notion de continuité s'étend à des ensembles "plus gros que $\mathbb{R}$", ce résultat reste spécifique à $\mathbb{R}$.

Proposition 9 *Si $f$ est une application continue strictement croissante d'un intervalle $I$ dans $\mathbb{R}$, alors $f$ réalise une bijection de $f$ sur $f(I)$, de bijection réciproque continue.*

Remarque 12 On déduit le graphe de $f^{-1}$ de celui de $f$ par réflexion par rapport à la diagonale principale (le montrer soigneusement constitue un exercice tout à fait élémentaire : faites le tout de même...).

Exemples 6
- *La fonction* sin *induit un homéomorphisme de* $[-\pi/2, \pi/2]$ *sur* $[-1,1]$. *La bijection réciproque est la fonction* arcsin.
- *La fonction* cos *induit un homéomorphisme de* $[0,\pi]$ *sur* $[-1,1]$. *La bijection réciproque est la fonction* arccos.
- *La fonction* tan *induit un homéomorphisme de* $]-\pi/2, \pi/2[$ *sur* $\mathbb{R}$. *La bijection réciproque est la fonction* arctan.

## 4 Comparaison des fonctions

Les notions d'équivalence, négligeabilité et domination vues pour les suites vont être étendues à des fonctions, au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ élément de $D$, ou au bord.

### 4.1 Vocabulaire et notations

Définition 10
Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un domaine $D$, et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ dans $D$ ou à son bord, avec $g$ ne s'annulant pas en dehors de $a$ (si $a \in D$). On dit que :
- $f$ est *négligeable* devant $g$ au voisinage de $a$, et on note $f \underset{a}{=} o(g)$, si $\dfrac{f}{g} \underset{a}{\longrightarrow} 0$ ;
- $f$ est *dominée* par $g$ au voisinage de $a$, et on note $f \underset{a}{=} O(g)$, si $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de $a$ ;
- $f$ est *équivalente* à $g$, et on note $f \underset{a}{\sim} g$, si $\dfrac{f}{g} \underset{a}{\longrightarrow} 1$.

Remarques 13
- Dans les définitions précédentes, si $a \in I$ et $g(a) = 0$, l'écriture $\dfrac{f}{g} \underset{a}{\longrightarrow} l$ signifie $\dfrac{f}{g} \underset{a^-}{\longrightarrow} l$ et $\dfrac{f}{g} \underset{a^+}{\longrightarrow} l$.
- Il est équivalent de dire "$f$ est bornée au voisinage de $a$" (resp. tend vers 0 en $a$) et "$f \underset{a}{=} O(1)$" (resp. $f \underset{a}{=} o(1)$).
- $f \underset{a}{=} o(g)$ implique évidemment $f \underset{a}{=} O(g)$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f$ est à valeurs non nulles sur un voisinage de $a$ (privé éventuellement de $a$) (pourquoi ?), et $g \underset{a}{\sim} f$.

- D'après les définitions, une fonction ne sera JAMAIS négligeable devant, dominée par ou équivalente à la fonction nulle BIEN ENTENDU.
- $f \underset{a}{\sim} g$ si et seulement si $f-g \underset{a}{=} o(g)$ ; on note alors parfois : $f \underset{a}{=} g+o(g)$.

EXEMPLE 7 *$t^{1515} \underset{0}{=} o(t^{512})$ mais $t^{512} \underset{+\infty}{=} o(t^{1515})$.*

### 4.2 Des propriétés élémentaires

Tous les résultats de cette partie sont élémentaires. Il faut les comprendre, et savoir les prouver RAPIDEMENT, puisqu'il n'est pas question de les APPRENDRE.

PROPOSITION 10 Transitivité des comparaisons
*Soient $f, g, h$ trois fonctions : définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*
- *Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.*
- *Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} O(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.*
- *Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.*
- *Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{=} O(h)$ alors $f \underset{a}{=} O(h)$.*
- *Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.*
- *Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{=} O(h)$.*

PROPOSITION 11 Comparaisons de sommes et de produits
*Soient $f, g, u, v$ quatre fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ :*
- *Si $f \underset{a}{=} o(u)$ et $g \underset{a}{=} o(u)$ alors $f+g \underset{a}{=} o(u)$.*
- *Si $f \underset{a}{=} O(u)$ et $g \underset{a}{=} O(u)$ alors $f+g \underset{a}{=} O(u)$.*
- *Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $u \underset{a}{\sim} v$, alors $fu \underset{a}{\sim} gv$ et $\dfrac{f}{u} \underset{a}{\sim} \dfrac{g}{v}$.*

### 4.3 Petits rappels

Comme pour les suites...

# ON NE SOMME PAS LES EQUIVALENTS

Et bien entendu...

# ON NE PASSE PAS LES EQUIVALENTS A L'EXPONENTIELLE

### 4.4 Fonctions usuelles au voisinage de $+\infty$

On va ici comparer les *fonctions de référence* suivantes au voisinage de $+\infty$, d'abord à l'intérieur d'une même classe, puis entre deux classes : $t \mapsto t^\alpha$, $t \mapsto (\ln t)^\beta$ et $t \mapsto e^{\gamma x}$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$.

PROPOSITION 12
- *si $\alpha < \alpha'$, alors $t^\alpha \underset{+\infty}{=} o(t^{\alpha'})$ ;*
- *si $\beta < \beta'$, alors $(\ln t)^\beta \underset{+\infty}{=} o\big((\ln t)^{\beta'}\big)$ ;*
- *si $\gamma < \gamma'$, alors $e^{\gamma t} \underset{+\infty}{=} o(e^{\gamma' t})$.*

PROPOSITION 13 *"lorsqu'il y a combat, ce sont les exponentielles qui l'emportent sur les polynômes, qui l'emportent eux-même sur les logarithmes" :*

$$e^{\gamma t} \underset{\gamma<0}{\ll} t^\alpha \underset{\alpha<0}{\ll} (\ln t)^\beta \underset{\alpha'>0}{\ll} t^{\alpha'} \underset{\gamma'>0}{\ll} e^{\gamma' t}.$$

On a ici utilisé la notation $f(t) \ll g(t)$ qui signifie $f(t) = o\big(g(t)\big)$ (ici, c'est implicitement au voisinage de $+\infty$).

### 4.5 Fonctions usuelles au voisinage de 0

On compare enfin les polynômes et les logarithmes au voisinage de $0^+$. Les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{\gamma t}$ tendant vers 1 en 0, ne nous intéressent plus.

EXERCICE 13 *A FAIRE ABSOLUMENT (et à retenir)*
*Etudier et représenter le graphe de $t > 0 \mapsto t \ln t$ (rappel : $t \ln t \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$).*

PROPOSITION 14
- *si $\alpha < \alpha'$, alors $t^{\alpha'} \underset{0^+}{=} o(t^\alpha)$ ;*
- *si $\beta < \beta'$, alors $(\ln t)^{\beta'} \underset{0^+}{=} o\big((\ln t)^\beta\big)$.*

PROPOSITION 15 *"lorsqu'il y a combat, ce sont les polynômes, qui l'emportent sur les logarithmes" :*

$$t^\alpha \underset{\alpha<0}{\ll} (\ln t)^\beta \underset{\alpha'>0}{\ll} t^{\alpha'}.$$

(implicitement, il s'agit de relations au voisinage de $0^+$).

REMARQUE 14 Il suffit en fait de retenir que $t \ln t \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, "et que les puissances n'y changent rien"

### 4.6 Des dévelopements limités classiques

Un *dévelopement limité* à l'ordre $n \geq 0$ d'une fonction $f$ au voisinage de $x_0$ est la donnée d'un polynôme $P$ de degré $\leq n$ tel que $f(x) - P(x) = o(x^n)$. Si un tel polynôme existe, il est unique (le prouver), et on écrit $f(x) = P(x) + o(x^n)$. Par exemple, $(1+t)^8 \underset{0}{=} 1 + 8t + 28t^2 + o(t^2)$. Notons que dans ce cas, on a même le résultat plus fort : $(1+t)^8 \underset{0}{=} 1 + 8t + 28t^2 + O(t^3)$.

EXERCICE 14 *Montrer que si $f(t) \underset{0}{=} O(t^8)$, alors $f(t) \underset{0}{=} o(t^7)$. En revanche, donner un exemple de fonction telle que $f(t) \underset{0}{=} o(t^7)$ sans avoir $f(t) \underset{0}{=} O(t^8)$.*

$p$ est ici un entier strictement positif FIXE. Tous les dévelopements limités donnés ici sont au voisinage de 0. **IL EST EXCLU DE LES UTILISER EN DEHORS DE 0, *BIEN ENTENDU*.**

PROPOSITION 16
- $(1+t)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha t + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \cdots + \dbinom{\alpha}{p} t^p + o(t^p)$, *où $\alpha \in \mathbb{R}$.*
- $\dfrac{1}{1-t} \underset{0}{=} 1 + t + t^2 + \cdots + t^p + o(t^p)$.
- $e^t \underset{0}{=} 1 + t + \dfrac{t^2}{2!} + \cdots + \dfrac{t^p}{p!} + o(t^p)$.
- $\sinh t \underset{0}{=} t + \dfrac{t^3}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{(2p+1)!} t^{2p+1} + o(t^{2p+1})$.

- $\cosh t \underset{0}{=} 1 + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{1}{(2p)!} t^{2p} + o(t^{2p})$.
- $\ln(1+t) \underset{0}{=} t - \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{p} t^p + o(t^p)$.
- $\sin t \underset{0}{=} t - \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} t^{2p+1} + o(t^{2p+1})$.
- $\cos t \underset{0}{=} 1 - \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^p}{(2p)!} t^{2p} + o(t^{2p})$.
- $\tan t \underset{0}{=} t + \frac{t^3}{3} + \frac{2}{15} t^5 + o(t^6)$.

PREUVE : Attendre quelques semaines, avec les formules de Taylor... Certaines peuvent être établies dès maintenant : cf TD. ■

## 4.7 Quelques applications

Les DLs servent **UNIQUEMENT** à des études locales : ou bien au voisinage d'un point, ou bien "au voisinage de $+\infty$". On peut chercher des limites, mais aussi la position d'une fonction par rapport à une asymptote.

EXERCICE 15 *Montrer que* $\dfrac{\ln(1+\sin x) - \tan x}{\ln \cos^2 2x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{8}$.

SOLUTION : $\ln(1+\sin x) = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + o(\sin^2 x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\tan x = x + o(x^2)$, donc le numérateur est équivalent à $-\frac{x^2}{2}\cdot$ Par ailleurs, $\cos^2 2x = \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right)^2 = 1 - 4x^2 + o(x^2)$, or $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$, donc $\ln \cos^2 2x \sim -4x^2$, donc la fraction est équivalente à $\frac{1}{8}$, puis *tend* vers $\frac{1}{8}$ : pourquoi ?

EXERCICE 16 *Donner un équivalent simple de* $\ln(1+\tan x) - \tan\big(\ln(1+x)\big)$ *au voisinage de* $0$.

SOLUTION : $\tan x = x(1+x^2/3) + o(x^4) \underset{0}{\sim} x$ et $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4)$. On écrit donc $\tan^2 x = x^2(1+2x^2/3) + o(x^4)$, $\tan^3 x = x^3 + o(x^4)$, $\tan^4 x = x^4 + o(x^4)$, de sorte que :

$$\ln(1+\tan x) = x - \frac{1}{2}x^2 + (1/3 + 1/3)x^3 + (-1/3 - 1/4)x^4 + o(x^4).$$

De même, $\ln(1+x) = x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) + o(x^4) \underset{0}{\sim} x$ et $\tan u = u + u^3/3 + o(u^4)$. On écrit donc $\ln^3(1+x) = x^3\left(1 - \frac{3}{2}x\right) + o(x^4)$, puis :

$$\tan\big(\ln(1+x)\big) = x - \frac{1}{2}x^2 + (1/3 + 1/3)x^3 + (-1/4 - 1/2)x^4 + o(x^4).$$

Finalement :

$$\ln(1+\tan x) - \tan\big(\ln(1+x)\big) = \frac{x^4}{6} + o(x^4) \underset{0}{\sim} \frac{x^4}{6}\cdot$$

EXERCICE 17 *Montrer que* $(3 + 2e^{\tan x})^{\pi - 2x} \underset{x\to\frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} e^2$. *Donner le comportement de cette même expression lorsque $x$ tend vers* $\frac{\pi}{2}^+\cdot$

Solution : Lorsque $x$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}^+$, après un passage par la forme exponentielle, les termes en jeu sont d'accord pour dire que l'expression tend vers 1.

Maintenant, si on pose $f(x) = (3 + 2\mathrm{e}^{\tan x})^{\pi - 2x}$, le comportement de $f$ au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}^-$ se ramène à celui de $f(\pi/2 - u)$ lorsque $u$ tend vers $0^+$. Mais pour $u > 0$ : $f(\pi/2 - u) = \exp\bigl(2u \ln(3 + 2\mathrm{e}^{1/\tan u})\bigr)$. On écrit donc :

$$\frac{1}{\tan u} = \frac{1}{u}\frac{1}{1 + u^2/3 + o(u^2)} = \frac{1}{u}\bigl(1 - u^2/3 + o(u^2)\bigr) = \frac{1}{u} + o(1),$$

de sorte que (pourquoi ?) $\mathrm{e}^{1/\tan u} \sim \mathrm{e}^{1/u}$, puis $3 + 2\mathrm{e}^{1/\tan u} \sim 2\mathrm{e}^{1/u}$. Ces termes tendent vers $+\infty$, de sorte que (pourquoi ? ? ?) les logarithmes sont équivalents : $\ln(3 + 2\mathrm{e}^{1/\tan u}) \sim \ln 2 + 1/u \sim 1/u$, puis $2u \ln(3 + 2\mathrm{e}^{1/\tan u}) \underset{u \to 0^+}{\longrightarrow} 2$, et on conclut par continuité de la fonction exponentielle.

Remarque 15 On aura noté que pour avoir des précisions sur $\dfrac{1}{f}$ lorsque $f(t) \sim At^k$, on FACTORISE $At^k$, pour se ramener à un DL de la forme $\dfrac{1}{1 + o(t)}$.

Exercice 18 *Etudier la limite éventuelle de $x^2\mathrm{e}^{1/x} - \sqrt[3]{x^6 + 3x^5 + x^4}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.*

Solution :

$$x^2\mathrm{e}^{1/x} = x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o(x^2)\right) = x^2 + x + \frac{1}{2} + o(1),$$

alors que :

$$\sqrt[3]{x^6 + 3x^5 + x^4} = x^2\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{1/3} = x^2\left(1 + \frac{1}{3}\Bigl(\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\Bigr) + \frac{1/3.(-2/3)}{2}\frac{9}{x^2} + o(1/x^2)\right),$$

soit $\sqrt[3]{x^6 + 3x^5 + x^4} = x^2 + x - \dfrac{2}{3} + o(1)$, et la différence tend donc vers $\dfrac{7}{6}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

Exercice 19 *Montrer que le graphe de $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x - 5} + \sqrt{4x^2 + 1}$ admet une droite asymptote en $+\infty$ et $-\infty$, et donner les positions respectives du graphe et de la droite.*

Solution : Après calculs, $f(x) \underset{+\infty}{=} 3x + 1 - \dfrac{11}{4x} + o(1/x)$, de sorte que la droite d'équation $y = x + 3$ est asymptote au graphe de $f$, et situé en dessous, puisque $f(x) - (x + 3) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{11}{4x} < 0$ pour $x$ assez grand.

Au voisinage de $-\infty$, le calcul précédent change, puisque $\sqrt{x^2} = -x$, de sorte qu'on trouve que le graphe est situé au dessous de son asymptote, qui est la droite d'équation $y = -3x - 1$.