Fonctions convexes

On suggère de traiter dans un premier temps les exercices 2,6,8,9,11,12.

EXERCICE 1 Soit f une application convexe et concave sur un intervalle. montrer que f est affine.
Application : on suppose f et g convexes telles qu'existent $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha f + \beta g$ soit concave. Que dire de f et g ?

EXERCICE 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Que dire de f ?

EXERCICE 3 Que dire du produit de la somme de deux fonctions convexes ? et du produit ? et du produit de deux fonctions convexes positives ? (on pourra se donner une idée du résultat en regardant les cas où les fonctions sont deux fois dérivables).

EXERCICE 4 Soit f convexe et bijective sur I. Que dire de f^{-1} ?

EXERCICE 5 (*)
- Soit f convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite l dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- Si l est finie, montrer que $x \mapsto f(x) - lx$ admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ en $+\infty$.

EXERCICE 6 (*)
Soit f continue sur $[0, 1]$ et g convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer :

$$g\Big(\int_0^1 f\Big) \leq \int_0^1 g \circ f.$$

Il s'agit de l'inégalité de Jensen, utile en probabilités en particulier.
Indication : *On pourra raisonner avec les sommes de Riemann, ou bien en montrant que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}$, $g(y_0 + h) \geq g(y_0) + Mh$ (faire un dessin), puis choisir y_0 convenablement.*

EXERCICE 7 Montrer que si $0 < x < 1$, alors $1 + x < \mathrm{e}^x < 1 + x(\mathrm{e} - 1)$.

EXERCICE 8 (*)
Soient $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0, 2\pi]$ de somme 2π. Montrer :

$$\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot$$

En déduire $\mathrm{Sup}(AB.AC.BC)$ lorsque A, B, C se promènent sur le cercle trigonométrique.
Cas d'égalité ?

EXERCICE 9 On suppose f convexe dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto f(x) - xf'(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Interprétation graphique ?
Indication : *On a intérèt à faire* d'abord *l'interprétation graphique !*

EXERCICE 10 Soient $a, b, x, y > 0$. Montrer :

$$x \ln\frac{x}{a} + y \ln\frac{y}{b} \geq (x + y) \ln\frac{x + y}{a + b}\cdot$$

Exercice 11 Soient $\alpha > 1$ et $x_1, \dots, x_n > 0$. Montrer :

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^{\alpha} \leq n^{\alpha-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}.$$

Exercice 12 Les propositions suivantes sont-elles exactes ? (preuve ou contre-exemple...)

1. La fonction $\chi_{\mathbb{Q}}$ (qui associe 1 aux rationnels et 0 aux irrationnels) est convexe.
2. Si f est convexe, alors $x \mapsto f(x) - 256x$ est convexe.
3. Si f est convexe et g concave, alors fg est concave.
4. Si pour tout $(x, y) \in I^2$, on a : $f\big(\frac{x+y}{2}\big) \leq \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big)$, alors f est convexe sur I.
5. Si f et g sont convexe, alors $\mathrm{Min}(f, g)$ est convexe.
6. Si f et g sont convexe, alors $\mathrm{Max}(f, g)$ est convexe.
7. Une fonction deux fois dérivable est ou bien convexe ou bien concave.
8. Pour tout $x \in]0, \pi/2]$, on a $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x < x$.
9. Si f est strictement convexe et g est concave (au sens large), alors $f + g$ est convexe.
10. Si f est convexe, g strictement concave, et $f + g < 0$, alors $f + g$ est strictement concave.
11. Si f est convexe sur $\mathbb{R}$, dérivable en 0 et 1 avec $f'(0) = f'(1)$, alors f est affine sur $[0, 1]$.
12. Si f est strictement convexe sur I, alors p_{x_0} est strictement croissante pour tout $x_0 \in I$.
13. Si p_{x_0} est strictement croissante pour tout $x_0 \in I$, alors f est strictement convexe sur I.
14. Si f est convexe et $a < b$ alors $f'_d(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_g(b)$.
15. Si f est convexe sur $\mathbb{R}$, alors f ne peut pas tendre vers $-\infty$ en $+\infty$.