# Continuité : questions préliminaires

1. Quel est le maximum de la fonction sin sur $[0, \pi/2[$ ? et sur $]0, \pi[$ ?
2. La fonction sin est-elle croissante ? est-ele décroissante ?
3. La fonction exp est-elle paire ou impaire ?
4. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est-elle continue en 0 ?
5. Si $f$ et $g$ sont continues en $x_0$, qu'en est-il de $fg$ ?
6. Si $f$ et $g$ sont discontinues en $x_0$, qu'en est-il de $fg$ ?
7. La fonction $x \mapsto |x|$ est-elle continue en 0 ? et en $-1$ ?
8. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est-elle continue en 0 ? et en $-1$ ?
9. Vrai ou faux ?
   - Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors $f(x)^{1000} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   - Pour tout $M \geq 0$, on a : “si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors $f(x)^K \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$”.
   - Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, alors $f(x)^{g(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   - Si $f$ est à valeurs $> 0$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} l$, alors $l > 0$.
   - Si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} l > 0$, alors $f$ est à valeurs $> 0$.
   - Si $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ et $f(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors $f(1/n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$.
   - Si $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ et $f(1/n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors $f(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} l$.
   - Si $f \underset{-\infty}{\longrightarrow} -1$ et $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$.
   - Si $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \frac{1}{100}$.
   - Si $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq M$, $|f(x)| \leq \frac{1}{100}$.
   - Si $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq M$ et pour tout $\varepsilon > 0$, $|f(x)| \leq \varepsilon$.
   - $f(x) - g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ implique : $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   - $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ implique : $f(x) - g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   - Pour $x$ proche de 0, $\sin x = x$.
   - Pour $x$ proche de 0, $\sin x$ est assez proche de $x$.
   - $\sin x - 2x \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$.
   - Pour $x$ proche de 0, $\sin x$ est assez proche de $2x$.
   - Si $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ est strictement croissante, avec $f(0) = 0$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[0, 1[$.

- Si $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est strictement croissante, avec $f(0)=0$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors $f$ réalise une injection de $\mathbb{R}^+$ sur $[0,1[$.
- Si $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est strictement croissante, avec $f(0)=0$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors $f$ réalise une surjection de $\mathbb{R}^+$ sur $[0,1[$.
- Si $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue, avec $f(0)=0$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[0,1[$.
- Si $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue, avec $f(0)=0$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors $f$ réalise une injection de $\mathbb{R}^+$ sur $[0,1[$.
- Si $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue, avec $f(0)=0$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors $f$ réalise une surjection de $\mathbb{R}^+$ sur $[0,1[$.
- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$.
- Si $f$ est continue sur un intervalle $I$, alors $f(I)$ est un intervalle.
- Si $f$ est continue sur $[0,1]$, alors $f([0,1])$ est un intervalle fermé borné.
- Si $f$ est continue sur $]0,1[$, alors $f(]0,1[)$ est un intervalle ouvert.
- Si $f$ est continue sur un intervalle borné $I$, alors $f(I)$ est un intervalle borné.

10. Qu'est-ce que ça peut vouloir dire "$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$" ?
11. Qu'est-ce qui est le plus grand : $10^{1000}$ ou $1,01^{10}$ ?
12. Qu'est-ce qui est le plus grand : $(1515!)^{1000}$ ou $1,01^{1515!}$ ?
13. Qu'est-ce qui est le plus grand : $n^{1000}$ ou $1,01^n$ ?
14. Qu'est-ce qui est le plus grand : $(\ln 10000)^{100}$ ou $\sqrt{10000}$ ?
15. Qu'est-ce qui est le plus grand : $(\ln 1515!)^{100}$ ou $\sqrt{1515!}$ ?
16. Qu'est-ce qui est le plus grand : $(\ln n)^{100}$ ou $\sqrt{n}$ ?
17. Peut-on dire qu'au voisinage de 0, on a $\mathrm{e}^x \sim 1+x$ ?
18. Peut-on le dire en me regardant dans les yeux ?