Corps des réels

1 Quelques inégalités

Exercice 1

- Traitons d'abord le cas où x et y sont positifs. Le membre de gauche vaut $x+y$, alors que le membre de droite vaut $2x$ si $x-y\geq 0$ et $2y$ si $x-y\geq 0$. Dans les deux cas, ça marche !
  Si x et y sont négatifs, on applique le résultat précédent à $-x$ et $-y$ (qui sont ≥ 0), et c'est gagné.
  Enfin, si $x>0$ et $y<0$ (le dernier cas étant symétrique), on applique l'inégalité à x et $-y$ pour obtenir $|x|+|y|\leq|x-y|+|x+y|$, et c'est gagné. ■
- L'inégalité demandée est équivalente à :
  $$|xy-1|\leq|x-1|+|y-1|+|xy-x-y+1|\,.$$
  Il suffit donc de noter que
  $$xy-1=(xy-x-y+1)+(x-1)+(y-1),$$
  puis d'appliquer l'inégalité triangulaire.

Exercice 2

On peut traiter l'exercice en se plaçant sur 3 domaines différents, ou bien en notant que $|x|\leq r$ si et seulement si $x^2\leq r^2$ (lorsque $r>0$), ce qui a le bon goût ici d'éliminer les valeurs absolues, après multiplication des deux membres par le numérateur QUI EST POSITIF.

On cherche donc les $x\in\mathbb{R}$ (différents de $-3\dots$) tels que $(x-1)^2\leq 4(x+3)^2$ soit $3x^2+26x+35\geq 0$, soit encore $x\in]-\infty,-7]\cup[-5/3,+\infty[$ (extérieur des racines).

Exercice 3

L'inégalité se montre par simple étude des fonctions $x\mapsto\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$ et $x\mapsto x-\ln(1+x)$.

On en déduit, en notant $p_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2\leq\ln p_n\leq\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k.$$

On se souvient ensuite que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, puis on applique les gendarmes pour obtenir : $\ln p_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{2}$, et enfin PAR CONTINUITE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE : $p_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mathrm{e}^{1/2}$.

Exercice 4

φ est à valeurs positives, mais en développant les carrés dans chaque terme de la somme, on obtient $\varphi(\lambda)=A\lambda^2+2B\lambda+C$, avec $A=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2$, $B=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ et $C=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}y_i^2$. Ainsi :

- si $A=0$, alors tous les x_i doivent être nuls (une somme de termes positifs ne peut être nulle que si tous les termes sont nuls), et l'inégalité demandée est évidente.
- si $A\neq 0$, φ est une fonction polynômiale du second degré à valeurs toujours positives. Son discriminant est donc nécessairement ≤ 0 (sans quoi, φ serait strictement négative entre les deux racines réelles). Ainsi, $B^2\leq AC$. On conclut en prenant les racines des deux membres (en notant que $x\mapsto\sqrt{x}$ conserve les inégalités par croissance). ■

Si $A = 0$, on a toujours égalité ($0 = 0\dots$). Dans le cas où $A \neq 0$, l'égalité est EQUIVALENTE à l'existence de $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\lambda_0) = 0$, ce qui revient à $x_i + \lambda_0 y_i = 0$ pour tout i.

Ainsi, il y a égalité si et seulement si tous les x_i sont nuls, ou bien s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout i, $y_i = K x_i$ (attention à l'ordre des quantificateurs). On dit que les n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont liés (terme issu de l'algèbre linéaire... patience !).

2 Bornes supérieures et inférieure

Exercice 5

On va raisonner par l'absurde, en supposant $a > b$. Fixons (après avoir fait un dessin !) $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$; on obtient alors

$$a \leq b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} < a$$

(puisque $b < a$), ce qui n'est guère raisonnable.

Exercice 6

Les bornes supérieure et inférieure d'un ensemble X seront notées S_X et I_X.

- $S_A + S_B$ est un majorant de $A + B$. De plus, si $X < S_A + S_B$, on va exhiber un élément de $A + B$ strictement plus grand que X, ce qui montrera que $S_A + S_B$ est *le plus petit* des majorants de $A + B$, donc sa borne supérieure.
  Notons $d = S_A + S_B - X$: il existe $a \in A \cap [S_A - d/3, S_A]$ et $b \in B \cap [S_B - d/3, S_B]$. On a alors $a + b \geq S_A + S_B - \dfrac{2}{3}d > X$, et c'est gagné.
- I_A est un minorant de A, donc $-I_A$ est un majorant de $-A$. De plus, si $X < -I_A$, on a $I_A < -X$, donc il existe $a \in A$ tel que $a < -X$. On a alors trouvé un élément $(-a)$ de $-A$ qui vérifie $X < -a$, et X n'est pas majorant de $-A$. Ainsi, $-I_A$ est le plus petit des majorants de $-A$: c'est donc sa borne supérieure.
  La relation $\text{Inf}\,(-A) = -\text{Sup}\ A$ se montre de la même manière, ou alors on applique le résultat précédent non pas à A, mais à $-A$.
- On combine les deux résultats précédents :
  $$\text{Sup}(A - B) = \text{Sup}\big(A + (-B)\big) = \text{Sup}\ A + \text{Sup}(-B) = \text{Sup}\ A - \text{Inf}\ B.$$
- Tout d'abord, $S_A S_B$ est un majorant de AB. Pour la suite, on peut supposer S_A et S_B strictement positifs (pourquoi ?)
  Ensuite, choisissons $X < S_A S_B$, et exhibons un élément de AB strictement plus grand que X. On peut supposer $X > 0$ (pourquoi ?). On va montrer qu'il existe $X_1 < S_A$ et $X_2 < S_B$ tels que $X = X_1 X_2$. Ainsi, il existera $a \in A$ et $b \in B$ tel que $a > X_1$ et $b > X_2$, puis $ab > X_1 X_2 = X$ (tous les termes sont strictement positifs), de sorte que X n'est pas majorant de AB.
  Pour trouver X_1 et X_2, on va se ramener à une somme : on cherche X_1 et X_2 tels que $\ln X_1 + \ln X_2 = \ln X < \ln S_A + \ln S_B$. Notons $d = \ln S_A + \ln S_B \ln X > 0$, et prenons X_1 tel que $\ln X_1 = \ln S_A - d/2$ et $\ln X_2 = \ln S_B - d/2$ (de tels X_1 et X_2 existent bien ; pourquoi ?). On a alors $\ln(X_1 X_2) = \ln S_A + \ln S_B - d = \ln X$, de sorte que $X_1 X_2 = X$, et par ailleurs $X_1 < S_A$ et $X_2 < S_B$ (pourquoi ?). C'est gagné.
  Une autre façon de traiter la seconde partie aurait été d'utiliser la CARACTERISATION SEQUENTIELLE (i.e. : utilisant des suites) des bornes supérieures : “S est borne supérieure de X si et seulement si S est un majorant de X, et s'il existe une suite d'éléments de X qui converge vers S”.
  On donnera un contre-exemple, si on n'impose pas $A, B \subset \mathbb{R}^+$.

Enfin, le lecteur montrera que $\text{Sup}\,(A \cup B)$ admet une borne supérieure finie, qui est le maximum de $\text{Sup}\ A$ et $\text{Sup}\ B$. On pourra supposer sans nuire à la généralité que ce maximum est $\text{Sup}\ A$...

Exercice 7

Si on prend UN majorant M de A, alors $\sqrt{M}$ est UN majorant de $\sqrt{A}$ (le vérifier !), de sorte que $\sqrt{A}$ admet une borne supérieure (finie). Pour simplifier, notons $S = \text{Sup}\ A$ et $R = \text{Sup}\ \sqrt{A}$.

- S est un majorant de A, donc $\sqrt{S}$ est un majorant de $\sqrt{A}$, or R est *le plus petit* de ces majorants, donc $R \leq \sqrt{S}$.
- De même, R est un majorant de $\sqrt{A}$, donc R^2 est un majorant de A, donc $S \leq R^2$, puis $\sqrt{S} \leq R$ (R est positif).

■

Exercice 8

Tout d'abord, au vu des premiers termes fournis par Maple, on peut penser que E admet 1 pour *maximum*, et -1 pour *borne inférieure non atteinte*.

Le premier point ne pose pas de problème, puisque $1 = \cos 0$ est un élément de E et en est un majorant.

Le second point est bien plus délicat. Tout d'abord, -1 est un minorant de E, et $-1 \notin E$ (sans quoi, il existerait $n \in \mathbb{N}$ de la forme $(2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$, et alors on aurait $\pi = \dfrac{n}{2k+1}$, ce qui est absurde, "puisqu'on sait bien" que π est irrationnel).

Maintenant, fixons $\varepsilon > 0$. On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $\cos n < -1 + \varepsilon$. Moralement, un tel n sera proche d'un réel de la forme $(2k+1)\pi$. Considérons donc $E = \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$: il s'agit d'un sous-groupe de $\mathbb{R}$ (non vide, stable par $(a,b) \mapsto a - b$), qui n'est pas de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ (sans quoi, on pourrait écrire $1 = p\alpha$ et $2\pi = q\alpha$, donc $\pi = \dfrac{q}{2p}$: problème), donc E est dense. Par ailleurs, il existe $\lambda > 0$ tel que la fonction cos prend des valeurs $< -1 + \varepsilon$ sur $I = [\pi - \lambda, \pi + \lambda]$. Mais comme E est dense, il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $p + 2q\pi \in I$. On a alors $\cos|p| = \cos p = \cos(p + 2q\pi) < -1 + \varepsilon$: gagné.

Exercice 9

Considérons l'ensemble $X = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geq x\}$. Il s'agit d'un ensemble non vide (il contient 0), majoré par 1. Il admet donc une borne supérieure S.

Si $x > S$, on a $f(S) \leq f(x) < x$. Ainsi, $f(S) < x$ pour tout $x > S$, donc $f(S) \leq S$ (c'est comme l'exercice 2).

Supposons $f(S) < S$. Il existe alors $x \in X$ tel que $f(S) < x$. On peut alors écrire la chaîne d'inégalités suivante, dont les extrémités posent problème :

$$f(S) < x \leq f(x) \leq f(S).$$

Ainsi, $f(S) \geq S$ et $f(S) \leq S$: c'est gagné.

3 Partie entière

Exercice 10

- On écrit $nx - 1 < E(nx) \leq nx$, $x - 1 < E(x) \leq x$, et on multiplie/soustrait soigneusement ces inégalités pour obtenir :
$$-1 < E(nx) - nE(x) < n.$$
On termine en notant que le terme central est entier.
Si $x \in \mathbb{Z}$, on aura $E(nx) - nE(x) = 0$, alors que si $x = \dfrac{n-1}{n}$, on aura $E(nx) - nE(x) = n - 1$.
- Notons $p = E(x)$. D'après l'inégalité précédente, on a $p \leq \dfrac{E(nx)}{n} < p + 1$. On a donc encadré le réel $\dfrac{E(nx)}{n}$ entre les entiers p et $p+1$ (strictement à droite) : on sait alors que p est la partie entière de ce réel.
- Il s'agit ici de connaître la position de x "à $\dfrac{1}{n}$ près". On va donc écrire (après avoir fait un dessin) $x = E(x) + \dfrac{i}{n} + r$, avec $r < \dfrac{1}{n}$ et $i = E\Big(n\big(x - E(x)\big)\Big) = E(nx) - nE(x)$ (pourquoi ?).
$E(x + k/n)$ vaut $E(x)$ lorsque $i + k < n$ (soit $k \in [\![0, n-1-i]\!]$), et $x+1$ pour les autres indices k. En comptant bien, on trouve donc :
$$\sum_{k=0}^{n-1} E(x + k/n) = (n-i)E(nx) + i\big(E(nx) + 1\big) = nE(nx) + i = E(nx).$$

Exercice 11

On écrit cette fois $x = E(x) + f_x$ et $y = E(y) + f_y$, avec $x, y \in [0, 1[$. L'inégalité demandée revient alors à : $E(f_x + f_y) \leq E(2f_x) + E(2f_y)$.

Le membre de gauche vaut 0 ou 1 (car $0 \leq f_x + f_y < 2$). Dans le premier cas, l'inégalité est évidente. Dans le second cas, on a $f_x + f_y \geq 1$, donc f_x ou f_y (voire les deux) est $\geq 1/2$, donc $E(2f_x)$ ou $E(2f_y)$ vaut 1, l'autre étant ≥ 0 : c'est gagné.

4 Divers

Exercice 12

Le fait que $\subset$ induise une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (et en fait $\mathcal{P}(E)$ pour tout ensemble E) ne pose pas de problème (reprendre la définition d'une relation d'ordre).

Par contre, cette ordre n'est pas total sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, puisque $[0, 1] \not\subset [1515, 1789]$ et $[1515, 1789] \not\subset [0, 1]$.

En fait, $\subset$ n'est totale sur $\mathcal{P}(E)$ que lorsque E est vide ou réduit à un élément...

Exercice 13

L'intersection de deux intervalles est soit vide, soit un intervalle. Pour le montrer, on peut vérifier environ un millier de cas distincts, ou bien utiliser la caractérisation des intervalles comme parties convexes.

Par contre, la réunion de deux intervalles n'est certainement pas un intervalle dans le cas général !!! Donner un contre-exemple (difficile !)

Que pensez-vous de la proposition suivante, valable pour deux intervalles I_1 et I_2 ?

"$I_1 \cup I_2$ est un intervalle si et seulement si $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$."

Exercice 14

- Depuis le CM1, on sait que la somme et le produit de deux rationnels sont des rationnels.
- Supposons $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. La somme $z = x + y$ ne peut pas être rationnelle, sans quoi on pourrait écrire $y = z - x \in \mathbb{Q}$.

  Le même raisonnement permet d'affirmer que SI DE PLUS x EST NON NUL, alors xy est irrationnel.
- Si $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on peut avoir $x + y \in \mathbb{Q}$ ($x = -\sqrt{2}$ et $y = \sqrt{2}$) mais aussi $x + y \notin \mathbb{Q}$ ($x = \sqrt{2} - 1$ et $y = \sqrt{2} + 1$).

  Même chose avec le produit (exemple ?).

Exercice 15

Remarquons déjà que la fonction identité répond au problème.

Soit maintenant f une solution (quelconque) au problème. Si $X \geq 0$, on peut écrire $X = x^2$, avec $x = \sqrt{X}$. On a alors :

$$f(X) = f(x.x) = f(x)f(x) = f(x)^2 \geq 0.$$

Maintenant, si $x < y$, on a $y - x > 0$, donc $f(y - x) \geq 0$, donc :

$$f(y) = f\big(x + (y - x)\big) = f(x) + f(y - x) \geq f(x),$$

et f est ainsi croissante. Le cours (résultat annexe) nous permet alors d'affirmer que f est de la forme $x \mapsto ax$, pour un certain $a \in \mathbb{R}$.

La relation $f(xy) = f(x)f(y)$ impose (par exemple pour $x = y = 1\ldots$) : $a = a^2$, donc $a(1 - a) = 0$, donc a vaut 0 ou 1. Mais f n'est pas la fonction nulle, donc $a = 1$, et f est la fonction identité.