Suites réelles

1 Généralités

Exercice 1

Notons l_1, l_2 et l_3 les limites respectives de (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}). La suite (u_{6n}) est extraite de (u_{2n}), mais aussi de (u_{3n}), si bien qu'elle converge à la fois vers l_1 et l_3, de sorte que $l_1 = l_3$.

Le même raisonnement avec (u_{6n+3}) fournit : $l_2 = l_3$. Ainsi, $l_1 = l_2$, et le cours (exercice) fournit la convergence de u vers cette valeur commune.

Exercice 2

1. Notons $u_n = \ln x_n$: $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln l$ (continuité de la fonction ln en l). Le théorème de Césaro permet d'affirmer qu'en posant $v_n = \dfrac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$, on a $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln l$, donc (continuité de la fonction exponentielle en $\ln l$) : $\mathrm{e}^{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, ce qui est exactement le résultat demandé !
2. Si $(y_n)_{n\geq 1}$ est une suite réelle et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$y_n = \frac{y_n}{y_{n-1}} \cdot \frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} \cdots \frac{y_2}{y_1} \cdot y_1,$$
si bien qu'en posant $x_1 = y_1$, et $x_k = \dfrac{y_k}{y_{k-1}}$ pour $k\geq 2$, on a $y_n = x_1 x_2 \dots x_n$, de sorte que si $\dfrac{y_n}{y_{n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, alors $\sqrt[n]{y_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$.
   - Avec $y_n = \mathrm{C}_{2n}^n$, on a :
   $$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{(2n)!}{n!^2} \cdot \frac{(n-1)!^2}{(2n-2)!} = \frac{2n(2n-1)}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 4$$
   (pourquoi ?), donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 4$.
   - Avec $y_n = \dfrac{n^n}{n!}$, on a :
   $$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{n-1} = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{1-n} = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\mathrm{e}^{-n\ln(1-\frac{1}{n})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e},$$
   donc $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$.
   - Avec $y_n = \dfrac{1}{n^{2n}} \cdot \dfrac{(3n)!}{n!}$, on a :
   $$\begin{aligned} \frac{y_n}{y_{n-1}} &= \frac{1}{n^{2n}} \frac{(3n)!}{n!} (n-1)^{2n-2} \frac{(n-1)!}{(3n-3)!} \\ &= 27\Big(1 - \frac{1}{3n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{3n}\Big)\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{-2} \mathrm{e}^{2n\ln(1-\frac{1}{n})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 27\mathrm{e}^{-2}, \end{aligned}$$
   donc $w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 27\mathrm{e}^{-2}$.

Exercice 3

Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, alors $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$ (suite extraite), donc (différence de deux suites convergentes) : $u_{n+1} - u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l - l = 0$.

La réciproque est fausse : prendre $u_n = \ln n$, ou $u_n = \sqrt{n}$, ou encore (si on veut une suite bornée) : $u_n = \sin\sqrt{n}$. Pour ce dernier cas, il est d'ailleurs très délicat de montrer la divergence... Le lecteur acharné pourra pour cela utiliser ...$\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$! Plus simplement (...), on peut utiliser la suite $(\sin n)$, "réputée divergente" (exercice sur les réels... utilisant $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$), qui est extraite de $(\sin\sqrt{n})$!

Exercice 4

Supposons : $u_{\varphi(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, avec φ une injection croissante de $\mathbb{N}$. Supposons que l n'est pas un majorant de u : il existe alors $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{N_0} > l$. Il existe par ailleurs N_1 tel que $\varphi(N_1) \geq N_0$. On a donc $u_{\varphi(N_1)} \geq u_{N_0}$, puis $u_{\varphi(n)} \geq u_{N_0}$ pour tout $n \geq N_1$, et en passant à la limite : $l \geq u_{N_0}$ (contradiction).

Ainsi, u est croissante majorée, donc admet une limite réelle l_1 (en fait, $l = l_1$: limite d'une suite extraite)

On pouvait également "travailler en ε", mais en utilisant intelligemment des passages à la limite d'inégalités, on peut souvent éviter la chirurgie epsilonesque.

2 Exemples d'études de convergence

Exercice 5

Les relations $x < \sqrt{xy}$ et $\dfrac{x+y}{2} < y$ s'établissent en notant que $x = \sqrt{x.x}$ et $y = \dfrac{y+y}{2}$. L'inégalité centrale est quant à elle **équivalente** à : $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 > 0$, qui est vérifiée car $\sqrt{x} \neq \sqrt{y}$.

Ces inégalités permettent de montrer **par récurrence** :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n,$$

de sorte que u est croissante et v est décroissante. Ensuite, u est minorée par son premier terme u_0, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > u_n \geq u_0$. De même, u est majorée par v_0. Ainsi, u et v sont respectivement croissante majorée et décroissante minorée, donc convergentes vers des limites l_1 et l_2.

Il reste à "passer à la limite" l'égalité $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ pour obtenir $l_1 = \sqrt{l_1 l_2}$, puis : $l_1 = l_2$.

Exercice 6

1. Mettre en facteur en haut et en bas les termes principaux (i.e. : utiliser des équivalents...) et obtenir 3 ;
2. On peut calculer u_n directement (somme des premiers termes d'une suite géométrique) :
$$u_n = \frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$
3. Il s'agit encore des premiers termes d'une suite géométrique :
$$u_n = \frac{1 - (-\frac{1}{3})^{n+1}}{1 + \frac{1}{3}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4}.$$

4. On a $|u_n| \leq \frac{n}{1+n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
5. On a cette fois $u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\cdot$
6. On factorise $\sqrt{n}$ ou bien $\sqrt{n \ln n}$ pour obtenir : $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
7. On factorise les termes principaux pour obtenir : $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.
8. $u_n = 2 + 3(-1)^n$: les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes de limites distinctes, donc u n'est pas convergente.
9. $u_n = 2 + 3\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$, bien que sous sa forme initiale, u est le produit de deux suites divergentes.
10. Lorsque $k \in [\![0, n]\!]$, on a $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{2n}} \leq 1$ (pour $n \geq 1$), donc par décroissance de la fonction cos sur $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\frac{n+1}{n} \cos \frac{1}{\sqrt{2n}} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n}\cdot$$

    Les deux membres extérieurs tendent vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, et il en va donc de même pour u_n.
11. L'encadrement $kx - 1 < E(kx) \leq kx$ valable pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ fournit après sommation :

$$\frac{(n+1)x}{2n} - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{(n+1)x}{2n},$$

    puis grâce aux gendarmes : $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{2}\cdot$
12. Si $10^k \leq n < 10^{k+1}$ (c'est-à-dire $k \leq \ln_{10} n < k+1$, soit encore : $k = E(\ln_{10} n)$), on a $v_n = k + 1 = 1 + E(\ln_{10} n) \sim \ln_{10} n$. On en déduit : $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln 10$.

Exercice 7

Il s'agit de trois suites arithmético-géométriques, dont le calcul se fait en suivant la méthode vue en cours. On trouvera comme Maple :

1. $u_n = 3 - 4.2^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$;
2. $v_n = 12 - 10\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 12$;
3. $w_n = 1 - (-1)^n$: cette suite n'admet pas de limite (les suites extraites (w_{2n}) et (w_{2n+1}) admettent deux limites distinctes 0 et 2).

Exercice 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = a_0 + rn$, où r est la raison de a. Le terme que l'on cherche à sommer est donc de la forme $r^3k^3 + \alpha k^2 + \beta k + \gamma$ (seul le premier terme nous intéresse...). Puisque $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, la somme $\sum_{k=0}^{n} a_{k-1}a_k a_{k+1}$ est donc de la forme $\frac{n^4}{4}r^3 + bn^3 + cn^2 + dn + e$, alors que le dénominateur est de la forme $16n^4r^4 + fn^3 + gn^2 + hn + i$, et ainsi :

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{k-1}a_ka_{k+1}}{a_{2n+2}^4} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{64r}\cdot$$

Exercice 9

1. • Tout d'abord, les termes de la suite sont bien définis et positifs, par récurrence sur n.
   • Un dessin (escaliers...) permet de se convaincre que u est croissante, convergente vers une limite supérieure à 1515. Maple semble penser la même chose.
   • On commence par étudier sommairement non pas f (étude immédiate : f est une bijection croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $[1515, +\infty[$) mais $g : x \mapsto f(x) - x$: g est continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$, de sorte que g réalise une bijection croissante de $[0, 1/4]$ sur $[1515, 1515 + 1/4]$, et une bijection décroissante de $[1/4, +\infty[$ sur $]-\infty, 1515 + 1/4]$. 0 admet donc un unique antécédent α par g, situé au dela de $1/4$, et même de 1515 car $g(1515) > 0 = g(\alpha)$ (notons qu'on pourrait avoir une expression explicite de α, mais bon...).
   • Ensuite, on localise la suite : $u_0 \in I = [0, \alpha]$, et $f(I) \subset I$, si bien que par récurrence immédiate, on a $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais si $x \in I$, on a $g(x) \geq 0$ donc $f(x) \geq x$, de sorte que $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n, donc la suite est croissante, majorée par α, donc convergente vers une certaine limite l.
   • L'inégalité $0 \leq u_n \leq \alpha$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous permet d'affirmer que $0 \leq l \leq \alpha$, donc f est définie et continue en l, et donc $f(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(l)$, mais $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$ (suite extraite), donc par unicité de la limite : $l = f(l)$, soit $g(l) = 0$, de sorte que $l = \alpha$.
   Le lecteur pourra étudier la suite vérifiant la même relation de récurrence, mais avec cette fois $u_0 = 1789$.
2. Par récurrence immédiate, la suite v est à termes positifs.
   Considérons cette fois l'application $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{1+x^2}\cdot$ Elle est dérivable, et sa dérivée en x est du signe de $1 + x^2 - 2x^2 = 1 - x^2$, donc f induit une bijection croissante de $[0, 1]$ sur $[0, 1/2]$ et une bijection decroissante de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1/2]$. Puisque $f(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$, la suite v est décroissante, minorée par 0, donc convergente vers $l \geq 0$ vérifiant $f(l) = l$ (continuité de f), ce qui impose $l = 0$.

Exercice 10

Supposons : $l < 1$. On a alors $\frac{\varphi(k)}{k} \leq \frac{1+l}{2} = a < 1$ pour n assez grand, disons $n \geq N_0$. Tous les entiers compris entre N_0 et n (à $n \geq N_0$ fixé) ont leur image dans $[\![0, an]\!]$. Si on prend n assez grand, ce nombre d'entiers $(n - N_0 + 1)$ est strictement plus grand que $an + 1$ (pourquoi ?), de sorte que deux de ces entiers auront nécessairement la même image ("principe du pigeonnier"), et φ n'est pas injective : contradiction.

Si φ est surjective et tend vers l, on montre que $l \leq 1$. On raisonne pour cela par l'absurde, en supposant $l > 1$: pour $n \geq N_0$, on a $\dfrac{\varphi(n)}{n} \geq \dfrac{1+l}{2} = b > 1$. Pour n assez grand (disons $n \geq N_1$), on a $bn \geq n+1$, de sorte que pour $n \geq N_2 = \mathrm{Max}(N_0, N_1)$, on aura $\varphi(n) \geq n+1$. Les antécédents des éléments de $[\![0, N_2]\!]$ sont donc nécessairements situés dans $[\![0, N_2 - 1]\!]$: il en manque un !

En combinant les deux résultats, on voit que si φ est bijective et convergente, alors la seule limite possible est 1.

Le lecteur curieux pourra construire une bijection de $\mathbb{N}$ telle que $\left(\dfrac{\varphi(n)}{n}\right)$ ne soit pas convergente.

3 Relations de comparaisons

EXERCICE 11

1. $u_n = n(\mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}} - 1) \sim \ln n$.
2. $u_n = n\left(\left(1 + \dfrac{1789}{n} + \dfrac{1515}{n^2}\right)^{1/2} - 1\right) \sim \dfrac{1789}{2}\cdot$
3. $u_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(n^{1515}+1789)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $u_n \sim 1$!
4. Fixons $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto x^n + nx - 1$ est une bijection croissante de $[0,1]$ sur $[-1, n]$, donc 0 admet un unique antécédent, ce qui justifie la définition de u_n.

   De plus, puisque $f(1/n) > 0$, on a $u_n \leq \dfrac{1}{n}$, puis $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Il reste à écrire $nu_n = 1 - u_n^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ (pourquoi ?) pour obtenir : $u_n \sim \dfrac{1}{n}\cdot$
5. La suite (u_n) est clairement (?) croissante. On fait la somme de plus en plus de termes, mais comme ces termes sont très petits, on peut donc espérer que u soit convergente. On va donc plutôt chercher à **MAJORER** u_n.

   Pour $k \geq 2$, on a $k^k \geq 2^k$, donc $\dfrac{1}{k^k} \leq \dfrac{1}{2^k}$, puis :

   $$1 \leq u_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{2n} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{2n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \leq 2.$$

   Ainsi, (u_n) est croissante majorée, donc admet une limite $l \geq 1$ (car $u_n \geq 1$ pour tout n), et on peut écrire : $u_n \sim l$.

   Une majoration de la forme $\dfrac{1}{k^k} \leq \dfrac{1}{k^2}$ permet également de s'en sortir par comparaison à une intégrale (classique) ou par la majoration plus astucieuse $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, qui fait apparaître des télescopages après sommation...
6. Cette fois, $u_n \geq (2n)^{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. En fait, les termes de la somme augmentent tellement vite, qu'on peut penser que la somme est équivalente ... à son plus gros terme !

Notons donc $v_n = u_n - (2n)^{2n}$, et montrons : $v_n = o\big((2n)^{2n}\big)$. On va donc **MAJORER** v_n (pas très finement, d'ailleurs) : v_n est constitué de $2n-1$ termes positifs et inférieurs ou égaux à $(2n-1)^{2n-1}$, d'où l'inégalité $0 \leq v_n \leq (2n-1)^{2n}$, puis $0 \leq \dfrac{v_n}{(2n)^{2n}} \leq \left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)^{2n}$. Le drame, c'est que le majorant tend vers e^{-1} (pourquoi, au fait ?)... On va donc faire un tout petit peu plus fin, en isolant le dernier terme : $v_n \leq (2n-2)(2n-2)^{2n-2} + (2n-1)^{2n-1}$. Cette fois, c'est gagné, puisque :

$$\frac{(2n-2)(2n-2)^{2n-2} + (2n-1)^{2n-1}}{(2n)^{2n}} \leq 2\frac{(2n)^{2n-1}}{(2n)^{2n}} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

7. Même technique qu'à l'exercice précédent, pour obtenir : $u_n \sim n!$.
8. Si $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $1 - \cos\alpha_n \sim \dfrac{\alpha_n^2}{2}$, donc ici $u_n \sim \dfrac{\alpha^2}{2n^2}\cdot$
9. $\sin\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, et $\tan\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc $\sin\dfrac{1}{n} - \tan\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, et $u_n = \dfrac{1}{2} + o(1)$, c'est-à-dire : $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$, ou encore $u_n \sim \dfrac{1}{2}\cdot$
10. Si on se contente de travailler à l'ordre 1, on peut écrire $\sin\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc $\tan\sin\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. De même, $\sin\tan\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, de sorte que $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

    Si on regarde les termes d'ordre 3 (par imparité, il n'y a pas de termes d'ordre 2), ceux-ci disparaissent, ainsi que les termes d'ordre 5. Il faut donc aller jusqu'à l'ordre 7, ce qui fondamentalement ne pose pas de grande difficulté théorique, mais pour ce qui est de la pratique, on préfère laisser faire cela à Maple ! Cela dit, avec le temps, il faudra savoir le faire soi-même, étant donnés les DLs de sin et tan...

    A titre anecdotique, le résultat donné par Maple est :

$$u_n \sim \frac{1}{30n^7}\cdot$$

Exercice 12

On se rappelle qu'un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ est $\dfrac{n^2}{2}$, mais également : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \sim \frac{n^3}{3}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 \sim \frac{n^4}{4}\cdot$ On va montrer : $S_n \sim \dfrac{n^{1516}}{1516}\cdot$

Notons $f : x \mapsto x^{1515}$. S_n peut être vue comme une somme d'aires de rectangles coincés sous le graphe de f entre 1 et $n+1$, mais aussi comme une somme de surfaces de rectangles dépassant le graphe de f entre 0 et n. Ces considérations vont nous permettre d'encadrer S_n entre deux intégrales "calculables" et équivalentes.

Fixons (provisoirement) $n \geq 1$ puis $k \in [\![1, n]\!]$. Pour tout $x \in [\![k, k+1]\!]$, on a $f(k) \leq f(x)$, de sorte que $f(k) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f$. Le même raisonnement à gauche fournit

$\displaystyle\int_{k-1}^{k} f \leq f(k)$. On “libère” k, pour obtenir en faisant *soigneusement* la somme :

$$\int_0^n f \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^{n+1} f,$$

soit encore :

$$\frac{n^{1516}}{1516} \leq S_n \leq \frac{(n+1)^{1516}-1}{1516}.$$

On remarque que le membre de droite est équivalent à celui de gauche. Cependant, on évitera d'utiliser un “théorème des gendarmes pour les équivalents”. Plus précisément, on refait à chaque fois la même démarche : on divise les trois termes par l'équivalent supposé, à savoir $\dfrac{n^{1516}}{1516}$, et on constate que les deux membres extérieurs tendent vers 1, donc (gendarmes) celui du centre également, nous fournissant le résultat souhaité.

Pour le deuxième exemple, on veut **MINORER** la somme, si possible par quelque chose que l'on saura calculer. S'il s'agissait de $\sum \dfrac{1}{k \ln k}$, on pourrait comparer à une intégrale de $\dfrac{1}{x \ln x}$, que l'on sait calculer (mais si, mais si... patience !). Le drame, c'est qu'on ne peut pas écrire $\dfrac{1}{k(\ln k + 1024)} \geq \dfrac{1}{k \ln k}$. Cependant, pour k assez grand, on aura $\dfrac{1}{k(\ln k + 1024)} \geq \dfrac{1}{2k \ln k}$ (plus précisément, cette inégalité aura lieu pour $k \geq \lceil \mathrm{e}^{1024} \rceil = k_0$).

Fixons donc $n \geq k_0$: on va pouvoir scinder T_n en une première somme constituée des premiers termes (dont le nombre est fixé, “bien que grand”), et une seconde somme que l'on pourra minorer par une intégrale de l'application $g : x \mapsto \dfrac{1}{2x \ln x}$:

$$T_n \geq \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{1}{k(\ln k + 1024)} + \frac{1}{2} \int_{k_0+1}^{n+1} \frac{dx}{x \ln x}. \qquad (1)$$

Pour calculer l'intégrale, on note (astuce ![1]) que $\dfrac{1}{x \ln x}$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \ln x$. Ainsi :

$$\int_{k_0+1}^{n+1} \frac{dx}{x \ln x} = \ln\big((\ln(n+1)\big) - \ln\big((\ln(k_0+1)\big),$$

et le minorant de (1) tend bien vers $+\infty$ (“assez lentement”, d'ailleurs) lorsque n tend vers $+\infty$.

En complément, le lecteur pourra montrer : $T_n \sim \ln \ln n$.

Exercice 13

On a respectivement :

---

[1] sinon, on peut faire un “changement de variable” $y = \ln x$: cf le cours d'intégration à venir...

- $\ln u_n = \ln^3 n$;
- $\ln v_n = 2\ln^2 n$;
- $\ln w_n = n \ln n \ln\ln n$;
- $\ln z_n = n(\ln n + \ln\ln n)$.

Ainsi :
- $\ln w_n - \ln z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$;
- $\ln z_n - \ln u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$;
- $\ln u_n - \ln v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

En prenant l'exponentielle de ces diverses différence, on obtient des limites de rapports entre les quatres suites initiales, pour obtenir :

$$v_n \ll u_n \ll z_n \ll w_n.$$

Exercice 14

Même démarche que l'exercice précédent :
- $\ln \alpha_n = -(\ln n + \ln\ln n)\ln\ln\ln n \sim -\ln n \ln\ln\ln n$;
- $\ln \beta_n = -(\ln\ln n)\ln(\ln n + \ln\ln n) \sim -(\ln\ln n)^2$.

Ainsi, $\ln \beta_n - \ln \alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc : $\alpha_n = o(\beta_n)$.

Exercice 15

1. On applique le théorème de Césaro à $v_n = u_n - u_{n-1}$ pour obtenir : $\dfrac{1}{n}(u_n - u_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, puis $\dfrac{u_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, d'où le résultat puisque $l \neq 0$.
2. Rappelons le résultat classique suivant : "Pour tout $x \geq 0$, on a $\sin x \leq x$; de plus, il y a égalité seulement pour $x = 0$". On pourra le prouver comme en terminale par une étude de la fonction $x \mapsto \sin x - x$, ou bien "quand vous serez grand", vous pourrez utiliser des arguments de convexité.

   La fonction sin induit une bijection croissante de $[0,1]$ sur $[0, \sin 1] \subset [0,1]$ (pourquoi ?).

   De la stabilité de $I = [0,1]$ par sin et du fait que $v_0 \in I$, on tire par récurrence immédiate : $v_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite v est donc minorée par 0, puis décroissante (tous les v_n sont positifs, donc $v_n \geq \sin v_n = v_{n+1}$), donc convergente vers $l \in [0,1]$ (passage de l'inégalité $0 \leq v_n \leq 1$ à la limite) vérifiant $\sin l = l$ (continuité de la fonction sin en l), donc $l = 0$ (pourquoi ?).

   A α fixé, on peut écrire :

   $$\frac{1}{v_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{v_n^\alpha} = \frac{v_n^\alpha - \sin^\alpha v_n}{v_n^\alpha \sin^\alpha v_n}\cdot$$

   Puisque $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut utiliser les développements limités de sin en 0. A l'ordre 1, on trouve un équivalent du dénominateur, à savoir $v_n^{2\alpha}$. A l'ordre 3, combiné avec celui de $(1+u_n)^\alpha$, on va trouver un équivalent du numérateur N_n en faisant la différence de DLs (et non d'équivalents, BIEN ENTENDU...) :

   $$N_n = v_n^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{v_n^2}{6} + o(v_n^2)\right)^\alpha\right) \sim \alpha \frac{v_n^{2+\alpha}}{6}\cdot$$

On obtient finalement :

$$\frac{1}{v_{n+1}^{\alpha}} - \frac{1}{v_n^{\alpha}} \sim \alpha \frac{v_n^{2-\alpha}}{6}\cdot$$

On va donc prendre $\alpha = 2$, de sorte que :

$$\frac{1}{v_{n+1}^{2}} - \frac{1}{v_n^{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\cdot$$

Grâce au résultat préliminaire, on en déduit $\frac{1}{v_n^2} \sim \frac{n}{3}$, puis (pourquoi ?) :

$$v_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}\cdot$$

4 Quizz

Exercice 16

Discuter la validité des affirmations suivantes, en donnant des preuves ou contre-exemples dans chaque cas :

1. **NON** : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}\cdot$
2. **NON** : $u_n = (-1)^n$.
3. **NON** : $u_n = n$.
4. **OUI** : si u et v convergent, alors uv également. Cela reste vrai lorsque $v = u$! ! !
5. **NON** : $u_n = (-1)^n$.
6. Ni oui ni non : **GROTESQUE** : on peut tendre vers 0, 1, 1515, mais pas quelque chose qui dépend de n ! ! !
7. **NON** : $u_n = n$.
8. **NON** : $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$
9. **NON** : $u_n = \frac{1}{n}\cdot$
10. **NON** : $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ n & \text{sinon} \end{cases}$
11. **OUI** : cf cours !
12. **NON** : $u_n = n$ et $v_n = 1$.
13. **NON** : $u_n = n - 1515$ et $v_n = 1789 - n$.
14. **NON** : $u_n = n$ et $v_n = 1$.
15. **OUI** : prenons $\varphi(0) = 0$. Il existe un entier $N_1 > 0$ tel que $u_{N_1} \geq u_0$ (cf définition de $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$!). On va alors poser $\varphi(1) = N_1$. Maintenant, il existe $N_2 > N_1$ tel que $u_{N_2} \geq u_{\varphi(1)}$: on va poser $\varphi(2) = N_2$... On construit ainsi φ par récurrence.

16. **OUI** : il existe deux injections croissantes φ et ψ telles que $u_n = v_{\varphi(n)}$ et $v_n = w_{\psi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors : $u_n = w_{(\psi \circ \varphi)(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (attention à l'ordre !).
17. **NON** : $u_n = (-1)^n$ n'est pas convergente, mais a deux extractions distinctes qui convergent vers 1 : u_{6n+10} et u_{4n+2}.
18. **NON** : $u_n = (-1)^n$.
19. **NON** : $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$.
20. **NON** : $u_n = (-1)^n$ et $v_n = u_n$.