Espaces affines

1 Sous-espaces affines

1.1 Questions d'intersection

EXERCICE 1 Déterminer l'intersection de la droite définie par $\left\{\begin{array}{l}2x-3y+z=917\\ x-4y+2z=329\end{array}\right.$ et du plan d'équation $x+y-z=1024$.

EXERCICE 2 Déterminer l'intersection des 3 plans affines de $\mathbb{R}^3$ suivants :

1. $P_1 : x+y+z=1$, $P_2 : x-y+z=2$, $P_3 : x-y+2z=3$;
2. $P_1 : x+y+z=1$, $P_2 : 2x+2y+2z=1$, $P_3 : 2048x-1515y=1000!$;
3. $P_1 : x+y+z=1$, $P_2 : x-2y+z=2$, $P_3 : y=2$.

EXERCICE 3 Montrer que pour deux hyperplans affines de $\mathbb{R}^n$, $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ implique : $H_1 /\!/ H_2$. Est-ce vrai pour deux droites ?

EXERCICE 4 *Théorème de Pappus*

D_1 et D_2 sont deux droites affines de $\mathbb{R}^2$ s'intersectant en I ; on se donne 4 points distincts $A, A' \in D_1$, $B, B' \in D_2$. A'' est l'intersection de D_1 avec la parallèle à $(A'B)$ passant par B' et B'' est l'intersection de D_2 avec la parallèle à (AB') passant par A'.

Montrer que $(A''B'')$ est parallèle à (AB).

EXERCICE 5 On se donne trois points non alignés d'un plan affine A, B, C, puis $B' \in (AC)$ distinct de A et C, $C' \in (AB)$ distinct de A et B, et enfin on suppose que les droites $(B'C')$ et (BC) s'intersectent en un point noté A'.

On note I le milieu de $[AA']$, J celui de $[BB']$ et K celui de $[CC']$.

Montrer que les points I, J et K sont alignés.

1.2 Distance algébrique

Dans les trois prochains exercices, E est euclidien, ce qui permet de parler de norme de vecteur. Si on oriente la droite (AB) par $\overrightarrow{u}$ de norme 1, alors $\overline{AB}$ désigne l'unique réel tel que $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\overrightarrow{u}$.

EXERCICE 6 *Théorème de Thalès*

1. Δ_1 et Δ_2 sont deux droites non parallèles d'un plan affine qui se coupent en un point Ω. D_1 (resp. D_2) est une droite qui intersecte Δ_1 et Δ_2 en A_1 et A_2 (resp. B_1 et B_2). Montrer que D_1 et D_2 sont parallèles si et seulement si $\dfrac{\overline{\Omega A_2}}{\overline{\Omega A_1}} = \dfrac{\overline{\Omega B_2}}{\overline{\Omega B_1}}$ (on donnera d'abord un sens à cette égalité).
2. On se place cette fois dans $\mathbb{R}^3$: Π_1 (resp. Π_2) est un plan qui intersecte Δ_1 et Δ_2 en A_1 et A_2 (resp. B_1 et B_2). A-t-on l'équivalence : "Π_1 et Π_2 sont parallèles si et seulement si $\dfrac{\overline{\Omega A_2}}{\overline{\Omega A_1}} = \dfrac{\overline{\Omega B_2}}{\overline{\Omega B_1}}$" ?

Exercice 7 *Théorème de Ménélaüs*

Soient ABC un "vrai" triangle, et P, Q, R trois points de respectivement (BC), (AC) et (AB), distincts de A, B et C. Montrer que P, Q et R sont alignés si et seulement si :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$$

Exercice 8 *Théorème de Céva*

Avec les notations de l'exercice précédent, montrer que les trois droites (AP), (BQ) et (CR) sont alignées ou concourantes si et seulement si :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$$

2 Applications affines

Exercice 9 Dans $\mathbb{R}^2$, soient $D_1 : x + y = 2$ et $D_2 : x - 2y = 256$. Donner l'expression analytique (dans le repère canonique) de ...

1. la projection sur D_1 parallèlement à D_2 ;
2. la symétrie par rapport à D_1 parallèlement à D_2 ;
3. l'affinité de base D_1, direction D_2 et rapport 3.

Exercice 10 En utilisant un changement de repère affine, exprimer dans le repère cartésien canonique de $\mathbb{R}^2$ la symétrie par rapport à $D_1 : x - y = 1$ parallèlement à $D_2 : x + 2y = -1024$.

Exercice 11 Reconnaître les applications affines suivantes de $\mathbb{R}^2$ (puis $\mathbb{R}^3$) dans lui-même :

1. $(x, y) \mapsto (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2})$;
2. $(x, y) \mapsto (y - 3, x + 3)$.
3. $(x, y, z) \mapsto (-\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}y + z - \frac{3}{2}, \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - z - \frac{1}{2}, -3x - 3y + z - 3)$.
4. $(x, y, z) \mapsto (-\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y + 3, -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + 3, \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y + z - 3)$.

Dans chaque cas, on étudiera la partie linéaire et l'ensemble des points fixes.

Exercice 12 Dans $\mathbb{R}_3$ affine : donner l'expression analytique de projection sur $\Pi : x + y + z = 2$ parallèlement à $D = A(1, 2, 3) + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis de la symétrie par rapport à D dans la direction Π.

Faire les vérifications d'usage...

3 Barycentres, convexité

Exercice 13 Montrer que les quatre points $M_i(x_i, y_i, z_i)$ de E_3 constituent une base affine si et seulement si $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Exercice 14 Soient $M_1, M_2, M_3, M_4 \in \mathcal{E}$. On définit A comme le barycentre de $(M_1, 1/2)$ et $(M_2, 1/3)$, B le barycentre de $(M_3, 1)$ et $(M_4, 2)$, et C le barycentre de $(B, 4)$ et $(C, 5)$.

Montrer que C est barycentre des M_i, avec des coefficients à préciser.

Exercice 15 Montrer que l'intersection de deux convexes est un convexe. Qu'en est-t-il de la réunion ?

Exercice 16 (**)

Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$. On définit l'enveloppe convexe de X, notée $Conv(X)$, comme le plus petit convexe de $\mathbb{R}^2$ contenant X.

1. Justifier la définition (penser au sous-espace engendré par une partie d'un espace vectoriel...)
2. Déterminer graphiqueent (mais en justifiant !) l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^2$ du polygone reliant les points $A(1,1)$, $O(0,0)$, $B(1,-1)$ et $C(-1,0)$ et A.
3. Montrer que $Conv(X)$ est l'ensemble des barycentres à coefs ≥ 0 des éléments de X.
4. Peut-on se contenter des barycentres de 2 éléments de X ?
   Le théorème de Carathéodory dit qu'en dimension n, on peut se contenter de prendre l'ensemble des barycentres de $n+1$ points de X : essayez de le montrer.

Exercice 17 (**)

Soit G un sous-groupe fini du groupe affine d'un plan affine (ouf !)

1. (essentiel) Donner des exemples de tels sous-groupes (vus au lycée, en géométrie... ou même chez les complexes !).
2. Montrer qu'il existe un point Ω tel que pour tout $f \in G$, $f(\Omega) = \Omega$.
   On pourra considérer "un bon barycentre" : voir les exemples précédents !

Les dernier exercice est tiré d'un document d'accompagnement du programme de mathématiques de seconde. Vous êtes priés de le traiter à votre guise dans un premier temps (solution purement géométrique, plutôt vectorielle, analytique, barycentres...) puis d'essayer les autres points de vue.

Exercice 18 On considère un quadrilatère $(ABCD)$. I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1. Donner la nature de $(IJKL)$ (avec une preuve !). Chercher une CNS simple sur le quadrilatère initial pour que $(IJKL)$ soit un losange (4 cotés de même longueur...).
2. P, Q et R désignent les milieux respectifs de $[BD]$, $[IK]$ et $[AC]$. Montrer que ces trois points sont alignés.