Espaces euclidiens

Table des matières

Dans ce chapitre, les espaces en jeu sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Lorsque ce n'est pas précisé, E désigne toujours un tel espace. Dans la troisième partie, les espaces considérés sont systématiquement de dimension finie.

1 Produit scalaire

1.1 Définition

DÉFINITION 1
Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est dite :
- *symétrique* lorsque $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ pour tout $x, y \in E$.
- *bilinéaire* lorsque pour tout $x \in E$, l'application $y \in E \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire (linéarité à gauche), et pour tout $x \in E$, l'application $y \in E \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire (linéarité à droite).
- *positive* lorsque $\varphi(x,x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.
- *définie* lorsque $x = 0$ est le seul vecteur tel que $\varphi(x,x) = 0$.

REMARQUES 1
- Si φ est bilinéaire, alors $\varphi(x,0) = \varphi(0,y) = 0$ pour tout $x, y \in E$.
- En pratique, pour montrer la bilinéarité d'une application symétrique, il suffit de montrer la linéarité à gauche. Le plus souvent, on se contentera d'ailleurs d'un "φ est clairement bilinéaire", éventuellement agrémenté d'un "du fait de la linéarité de l'intégrale"...

DÉFINITION 2
Un produit scalaire sur un espace E est une forme bilinéaire définie positive. Muni d'un produit scalaire, un espace vectoriel est dit "préhilbertien réel". Lorsqu'il est de dimension finie, on parlera d'espace euclidien (cf partie 3).

REMARQUE 2 Les produits scalaires sont souvent notés de façon infixe (comme une LCI) : $<x|y>$ à la place de $\varphi(x,y)$, ou bien $<\cdot|\cdot>$ à la place de φ. On trouvera également les notations $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y}$, ou $(x|y)$...

1.2 Exemples fondamentaux

BIEN ENTENDU, on ne prétend pas donner dans ce qui suit LES produits sclaires sur certains espaces, mais DES produits scalaires usuels.

1. Sur $E = \mathbb{R}^n$:
   - $<x|y> = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$: il s'agit de la structure euclidienne la plus simple donc la plus naturelle sur $\mathbb{R}^n$: quand on parle de $\mathbb{R}^n$ muni de sa *structure euclidienne canonique*, il s'agit de ce produit scalaire.
   - Plus anecdotiquement, on peut définir des produits scalaires plus généraux en fixant une famille de réels **strictement positifs** $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, et on posant : $< x|y > = \alpha_1x_1y_1 + \cdots + \alpha_nx_ny_n$.
2. Sur $E = \mathcal{C}([0,1])$:
   - Le produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_0^1 fg$ est l'un des plus fréquent sur ce type d'espace.
   - Le produit scalaire précédent se généralise à ceux de la forme

     $$<f|g> = \int_0^1 fg\rho,$$

     où ρ est une application continue sur $[0,1]$, à valeurs positives, et ne s'annulant qu'en un nombre fini de points (exemple : $t \mapsto \sin \pi t$). Contrairement à la généralisation précédente, celle-ci est très riche.

Remarques 3

- Pour montrer le caractère défini de ces formes bilinéaires, on a ABSOLUMENT besoin de la continuité des fonctions en jeu. C'est le SEUL point non trivial, donc celui sur lequel on vous attend...
- Dans certains cas, les produits scalaires font intervenir des intégrales impropres. Il faut alors justifier DES LE DEBUT l'intégrabilité des fonctions.

3. Sur $E = \mathbb{K}_n[X]$:
   - $<P|Q>= \displaystyle\sum_{i=0}^{n} p_i q_i$, où $P = \sum p_i X^i$ et $Q = \sum q_i X^i$.
   - $<P|Q>= \displaystyle\int_0^1 PQ$, mais aussi $<P|Q>= \displaystyle\int_{1024}^{1515} PQ$.
   - $<P|Q>= \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$: justifier qu'il s'agit effectivement d'un produit scalaire.

   Remarque 4 Pour les produits scalaires "avec une intégrale", il suffit que le domaine d'intégration soit un intervalle non trivial pour assurer le caractère défini, puisqu'un polynôme admettant une infinité de racines est nécessairement nul, ce qui n'est pas le cas pour une fonction quelconque, BIEN ENTENDU.

4. Sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{n^2}$; il est donc naturel de prendre comme produit scalaire : $<A|B>= \displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j}$.

   Remarque 5 Le lecteur vérifiera sans mal qu'on a :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j} = \mathrm{tr}\,({}^t A.B).$$

1.3 Cauchy-Schwarz

Proposition 1 *Soit $<\cdot|\cdot>$ une forme bilinéaire symétrique sur E.*

- *Si $<\cdot|\cdot>$ est positive, alors :*

$$\forall x, y \in E, \qquad |<x|y>| \leq <x|x>^{1/2} <y|y>^{1/2}$$

- *Si de plus $<\cdot|\cdot>$ est définie, alors on a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si x et y sont liés.*

Preuve : Comme on l'a déjà vu dans deux cas particulier, il s'agit de considérer l'application $\lambda \mapsto <\lambda x + y|\lambda x + y>$... ■

Remarque 6 Pour des raisons politico-historiques, on trouvera parfois le nom du camarade Bugnakowsky joint à ceux de Cauchy et Schwarz.

Exercice 1 *Si A et B sont deux matrices symétriques, montrer :*

$$\left(\mathrm{tr}\,(AB + BA)\right)^2 \leq 4\mathrm{tr}\,(A^2)\mathrm{tr}\,(B^2).$$

1.4 Norme associée

DÉFINITION 3
Une *norme* sur E est une application N de E dans $\mathbb{R}^+$ telle que :
- $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$;
- $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$ pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$ ("*homogénéité*").
- Pour tout $(x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ ("*inégalité triangulaire*").

PROPOSITION 2 *Si $<\cdot|\cdot>$ est un produit scalaire sur E, alors l'application $x \in E \mapsto <x|x>^{1/2}$ est une norme sur E.*

PREUVE : La seule chose non triviale est l'inégalité triangulaire ("inégalité de Minkowsky" dans le cas d'un produit scalaire). Là encore, on l'a déjà vue dans le passé. On prouvera même qu'il y a égalité si et seulement si les deux vecteurs sont positivement liés. ■

REMARQUE 7 Si $\|\cdot\|$ est une norme associée à un produit scalaire, on parle de norme euclidienne. Question naturelle : existe-t-il des normes qui ne sont pas euclidiennes ? Réponse : OUI ! Question : par exemple ? Réponse : patience !

La fin de cette partie n'est pas à proprement parler au programme : il s'agit simplement de donner une petite idée sur la notion de distance.

DÉFINITION 4
Une distance sur un ensemble E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que
- $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ (*séparation*) ;
- $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout $x, y \in E$ (*symétrie*) ;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tout $x, y, z \in E$ (*inégalité triangulaire*).

Le résultat suivant est une conséquence évidente des propriétés des normes :

PROPOSITION 3 *Si N est une norme sur un espace E, alors l'application $(x, y) \mapsto N(x - y)$ est une distance sur E.*

Ainsi, un produit scalaire fournit naturellement une norme, qui fournit naturellement une distance. Question : existe-t-il des distances qui ne sont pas associées à des normes ? Réponse : oui ; attendre la fin de l'année pour le nano-cours de topologie.

2 Orthogonalité

Dans cette partie, E désigne un espace muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$. La norme associée est notée $\|\cdot\|$.

2.1 Vecteurs et espaces orthogonaux

DÉFINITION 5
- Deux vecteurs x et y sont dits *orthogonaux* lorsque $<x|y>= 0$; on note alors $x \perp y$.
- Deux sous-espaces F_1 et F_2 sont dits orthogonaux lorsque $< x|y >= 0$ pour tout $(x, y) \in F_1 \times F_2$; on note alors $F_1 \perp F_2$.
- Une famille de vecteurs $(y_1, \dots, y_k)$ est dite orthogonale (abréviation : $\perp$) lorsque $< y_i|y_j >= 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$ tel que $ieqj$. Dans le cas où les y_i sont de norme 1, la famille est dite *orthonormée* (abréviation : $\| \perp \|$).

PROPOSITION 4
- *Si $(y_1, \dots, y_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls, alors elle est libre.*
- *Si $F_1 = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_p)$, alors $F_1 \perp F_2$ si et seulement si $x_i \perp y_j$ pour tout $(i, j) \in [\![1, k]\!] \times [\![1, p]\!]$.*

- *Si $F_1 \perp F_2$, alors $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.*

Remarques 8
- La CNS pour avoir $F_1 \perp F_2$ n'est pas EQUIVALENTE à l'orthogonalité de la famille $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_p)$.
- Retenir ce qui se passe lorsqu'on "scalairise" une combinaison linéaire de vecteurs orthogonaux avec l'un d'eux : il s'agit d'une étape cruciale dans de nombreux raisonnements dans les espaces euclidiens. Cela fournit aussi la décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée : c'est souvent utile en maths... comme en physique.

Définition 6
Si $X \subset F$, l'*orthogonal* de X, noté $X^\perp$ est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les éléments de X :

$$X^\perp = \{y \in E \,|\, \forall x \in X,\ <x|y>= 0\}.$$

Remarque 9 En pratique, X est souvent un singleton v_0 (et on note $v_0^\perp$ plutôt que $\{v_0\}^\perp$) ou un sous-espace de E.

On montrera sans problème le :

Fait 1 *Si $X \subset E$, alors $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Exercice 2 *Si F est un sous-espace de E, montrer : $F^\perp \perp F$.*

Les résultats suivants sont faciles à montrer (le faire tout de même : il s'agit d'un bon exercice, pour vérifier qu'on a bien compris ces mystérieuses histoires de quantificateurs et de machins qu'on fixe. . .) et très utiles.

Proposition 5
- *$\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$;*
- *si $F \subset G$, alors $G^\perp \subset F^\perp$;*
- *si $v_0 \in E$, alors $v_0^\perp = (\mathbb{R}v_0)^\perp$;*
- *$F \cap F^\perp = \{0\}$.*

Exercice 3 *Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer les relations suivantes :*
- *$F \cap F^\perp = \{0\}$;*
- *$F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$;*
- *$F \subset (F^\perp)^\perp$;*
- *$F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.*

Remarque 10 On verra que les deux dernières inclusions sont des égalités dans le cas de la dimension finie, mais peuvent être strictes en dimension quelconque. En particulier, si vous pensez les avoir montrées, reprenez vos démonstrations : pour montrer $A \subset B$, avez-vous commencé par FIXER un élément de A pour prouver A LA FIN qu'il était dans B ? Ben non ! C'est pour ça que vos démonstrations sont fausses...

2.2 Pythagoras' theorem

Théorème 1 *Soient $x_1, \dots, x_k \in E$ $(k \geq 2)$; alors :*
- *$x_1 \perp x_2$ si et seulement si $\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$;*
- *SI la famille $x_1, \dots, x_k$ est orthogonale, ALORS :*

$$\|x_1 + \cdots + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_k\|^2.$$

Exercice 4 *Pythagore a-t-il plutôt énoncé son théorème dans le cadre des espaces euclidiens ou préhilbertiens ?*

Exercice 5 *Trouver une famille de trois vecteurs x_1, x_2, x_3 non orthogonale telle que $\|x_1 + x_2 + x_3\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \|x_3\|^2$.*

2.3 Identité du parallélogramme

On a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 <x|y>$. Cette relation nous permet de trouver le produit scalaire de deux vecteurs uniquement à l'aide de normes :

Fait 2 *Si $x, y \in E$, on a :*

$$<x|y> = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

On parle de formules de polarisation.

Remarque 11 BIEN ENTENDU, ces formules sont monstrueusement compliquées à retrouver, donc il faut absolument les retenir par cœur......

Proposition 6 Identité du parallélogramme
Si $x, y \in E$, alors :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|)^2).$$

Remarque 12 On laisse au lecteur le soin d'interpréter géométriquement le résultat *(indication : lire le nom de cette relation)*. Voir aussi la remarque 11.

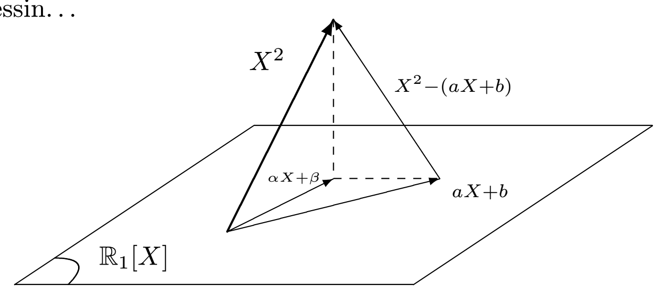
Exercice 6 *Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on note $\|f\|_\infty$ le maximum de $|f|$ (justifier l'existence...).*
Montrer que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E, mais qu'elle n'est pas euclidienne (pour le second point, on cherchera f et g niant l'identité du parallélogramme).

2.4 Un exercice exemplaire

Exercice 7 *Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $f(a,b) = \displaystyle\int_0^1 \big(t^2 - (at+b)\big)^2 dt$.*
Montrer que $\mathrm{Inf}\{f(a,b) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$ *est en fait un minimum, et le calculer.*

Solution : “Avec un peu de métier”, on voit qu'il s'agit de déterminer la distance d'un bon vecteur à un bon sous-espace d'un bon espace-vectoriel muni du bon produit scalaire...

- Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, muni du produit scalaire usuel $<P|Q> = \int_0^1 PQ$ et de la norme $\|\cdot\|$ associée. On a $f(a,b) = \|X^2 - (aX+b)\|^2$. Il s'agit donc de minimiser une distance (en fait, son carré).
- Faisons un dessin...



Interprétation géométrique du problème

Sur le dessin, on fait intervenir un *hypothétique* vecteur $\alpha X+\beta$ tel que $X^2-(\alpha X+\beta)$ soit orthogonal à $\mathbb{R}_1[X]$. Il semblerait qu'un tel vecteur aurait un rôle particulier...

- SI PAR MIRACLE un tel vecteur $P_0=\alpha X+\beta$ existe, on peut écrire grâce à Pythagore, au dessin, et à la décomposition qu'il inspire :

$$\begin{aligned} f(a,b) &= \|X^2-(aX+b)\|^2=\|\big(X^2-(\alpha X+\beta)\big)+\big((\alpha X+\beta)-(aX+b)\big)\|^2 \\ &= \|X^2-(\alpha X+\beta)\|^2+\|(\alpha-a)X+\beta-b)\|^2\geq\|X^2-(\alpha X+\beta)\|^2=f(\alpha,\beta)\end{aligned}$$

  Les $f(a,b)$ sont donc minorés par une valeur particulière $f(\alpha,\beta)$, ce qui assure l'existence d'un minimum.
- Cherchons si, par hasard, un tel polynôme P_0 existe. La condition $P_0\in(\mathbb{R}_1[X])^{\perp}$ revient aux deux équations $<X^2-(\alpha X+\beta)|1>=0$ et $<X^2-(\alpha X+\beta)|X>=0$, soit : $\dfrac{\alpha}{2}+\beta=\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{1}{4}\cdot$ Ce système admet une unique solution $(\alpha,\beta)=(1,-1/6)$.
- Ainsi, $f(a,b)$ est minoré par $f(1,-1/6)$, qui est donc un minimum. Il ne reste plus qu'à calculer ce minimum, en notant que par construction, $<X^2-\alpha X+\beta)|\alpha X+\beta>=0$, de sorte que :

$$\begin{aligned} f(\alpha,\beta) &= <X^2-\alpha X+\beta)|X^2-\alpha X+\beta)>=<X^2-\alpha X+\beta)|X^2> \\ &= <X^2|X^2>-<X^2|X>+\frac{1}{6}<X^2|1>=\frac{1}{180}\cdot\end{aligned}$$

Remarques 13

- Il est exclu de traiter ce type d'exercice sans faire de dessin.
- Très bientôt (quelques pages !), on verra que l'existence et l'unicité de P_0 était en fait acquise du simple fait qu'on travaille en dimension finie : le miracle n'en était pas un...
- Bien des variantes de cet exercice vous seront proposées en TD, khôlles, et plus si affinités.[1]

3 Espaces euclidiens

3.1 C'est quoi donc ?

Définition 7

Un espace *euclidien* est un espace vectoriel **de dimension finie** muni d'un produit scalaire.

Les espaces suivants sont ceux dans lesquels on travaillera la plupart du temps.

Exemples 1

- $\mathbb{R}^n$ *muni de son produit scalaire usuel ;*
- $\mathbb{R}_n[X]$ *muni d'un des produits scalaires usuels ;*
- *des espaces de fonctions comme* $\mathcal{C}([0,1])$ *munis de produits scalaires définis avec une intégrale ;*
- *plus rarement :* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *muni de :* $<A|B>=\mathrm{tr}\,({}^tA.B)$.

3.2 Le procédé de Schmidt

Proposition 7 *Soit* $(e_1,\dots,e_n)$ *une base d'un espace euclidien* E*. Alors il existe une base orthogonale* $(f_1,\dots,f_n)$ *telle que pour tout* $k\in[\![1,n]\!]$, $\mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_k)=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$.

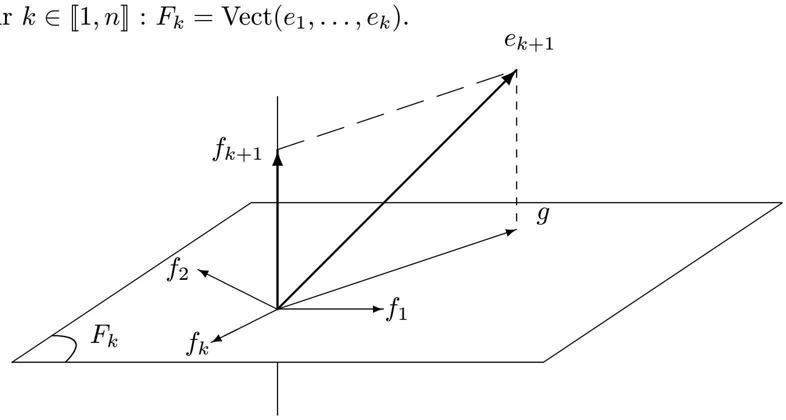
Preuve :

– On fait quoi ?

– Une récurrence !

[1] Bon, c'est assez clair ou il faut faire un dessin ?

– Oui mais avant ?
– Un dessin ?
– Oui ! ! !
Notons pour $k \in [\![1,n]\!]$: $F_k = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$.



Le procédé d'orthogonalisation de Schmidt

- Pour $k \in [\![1,n]\!]$, soit $P(k)$ la proposition : "Il existe une famille orthogonale $(f_1, \ldots, f_k)$ telle que pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $\text{Vect}(f_1, \ldots, f_i) = F_i$."
- $P(1)$ ne pose pas de problème : il suffit de prendre $f_1 = e_1$.
- Supposons le résultat acquis au rang $k \in [\![2, n-1]\!]$. Déjà, e_{k+1} n'est pas dans F_k (liberté des e_i). Le dessin nous suggère de chercher f_{k+1} sous la forme $e_{k+1} - g$, avec $g \in F_k$ (on ne peut pas encore parler de projection, attention...). Maintenant, on peut chercher g sous la forme $\sum \alpha_i e_i$ ou bien sous la forme $\sum \beta_i f_i$. Le deuxième point de vue sera le bon puisqu'il conduit à des conditions d'orthogonalité très simples. En effet, on a $e_{k+1} - g \perp F_k$ si et seulement $<e_{k+1} - g | f_i>= 0$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$ (puisque $f_1, \ldots, f_k$ est une base de F_k), et cette condition s'écrit en fait $\beta_i \|f_i\|^2 =<e_{k+1} | f_i>$, équation qui admet bien une solution... pour peu qu'on ait bien compris le programme d'analyse... de cinquième.

Ainsi, $P(k)$ est vérifié pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Pour $k = n$, on a le résultat souhaité. ■

Remarques 14

- Dans la construction précédente, on a posé :

$$f_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{<e_{k+1}|f_i>}{\|f_i\|^2} f_i,$$

  formule qu'il est INTERDIT d'apprendre. Cela dit, il faut savoir la retrouver rapidement. En particulier, on peut la donner à ingérer à Mapeul, cf exemple 2 à venir.
- On peut également énoncer un théorème d'"orthonormalisation", où on obtient une base orthonormée. La preuve est la même : on normalise simplement les vecteurs à chaque étape, ce qui revient à prendre :

$$f_{k+1} = \frac{e_{k+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} <e_{k+1}|f_i> f_i}{\|e_{k+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} <e_{k+1}|f_i> f_i\|}.$$

- En y regardant de plus près, il y a unicité de la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ si on impose qu'ils soient de norme 1, ainsi qu'une condition du type $<e_k|f_k> > 0$ (puisqu'il existe deux vecteurs de norme 1 qui conviennent).

Exemple 2 *On considère* $\mathbb{R}_n[X]$ *muni de son produit scalaire usuel* $< P|Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. *Maple est très bien adapté pour orthogonaliser la base canonique (note : on évite d'utiliser* `sum`*, qui pose des problèmes de gestion d'indices).*

```
scal:=(P,Q)->int(P*Q,X=0..1):norme2:=P->scal(P,P):
orthog:=proc(n)
 local e,f,i,k:
 e:=[seq(X^i,i=0..n)]:f:=e:
 for k from 2 to n+1 do
   for i from 1 to k-1 do
      f[k]:=f[k]-scal(e[k],f[i])*f[i]/norme2(f[i])
   od: f[k]:=sort(expand(f[k]),X) od:
 RETURN(f)
end:
orthog(4);
```

$$[1, X - \frac{1}{2}, X^2 - X + \frac{1}{6}, X^3 - \frac{3}{2}X + \frac{3}{5}X - \frac{1}{20}, X^4 - 2X^3 + \frac{9}{7}X^2 - \frac{2}{7}X + \frac{1}{70}]$$

Les deux corollaires suivant sont la "raison d'être" du procédé de Schmidt.

Corollaire 1 *Dans un espace euclidien, il existe une base orthogonale.*

On peut même completer une base donnée pour obtenir, après orthogonalisation, une base orthogonale de l'espace, ce qui permet d'obtenir le :

Corollaire 2 *Si* F *est un sous-espace de* E*, alors* $F^\perp$ *est un supplémentaire de* F*. En particulier,* $\dim F^\perp = n - \dim F$*, où* $n = \dim E$*.*

Preuve : On prend une base $(e_1, \ldots, e_k)$ de F, que l'on complète en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. On orthogonalise pour obtenir une base orthogonale $(f_1, \ldots, f_n)$ de E, avec $(f_1, \ldots, f_k)$ base de F.
Maintenant, le sous-espace $G = \mathrm{Vect}(f_{k+1}, \ldots, f_n)$ est de dimension $n - k$ et est inclus dans $F^\perp$ (puisque chaque f_i $(i > k)$ est orthogonal à chaque f_j $(j \leq k)$, donc à F).
Puisque $F \cap F^\perp = \{0\}$, on sait que $n \geq \dim(F + F^\perp) = \dim F + \dim F^\perp$, donc $\dim F^\perp \leq n - \dim F = n - k = \dim G$, et l'inclusion $G \subset F^\perp$ est en fait une égalité.
Il reste à voir que par construction de G, on a bien $E = F \oplus G$ (le vérifier une nouvelle fois, si ce n'est pas clair). ■

Exercice 8 *Dans le cas où* F *et* G *sont des sous-espaces de* E *euclidien, montrer :*
- $(F^\perp)^\perp = F$ *;*
- $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$*.*

Remarque 15 On donne pour la petite histoire deux cas d'inclusions strictes, en dimension finie. Dans les deux cas, E désigne $\mathcal{C}([0,1])$ muni du produit scalaire $<f|g>= \int_0^1 fg$. Si F désigne l'ensemble des applications polynomiales, on a $F^\perp = 0$, puis $(F^\perp)^\perp = E$, ce qui fournit la première inclusion stricte. Pour la seconde, on pourra prendre $F = \mathbb{R}[X]$ et $G = \{t \mapsto P(t)\sin t \mid P \in \mathbb{R}[X]\}\ldots$
Bien entendu, il y a un peu de travail pour prouver les relations annoncées ici…

3.3 Projecteurs et symétries orthogonales

REMARQUE 16 BIEN ENTENDU, on sait qu'il est grotesque de parler de LA projection sur un sous-espace F de E ; idem pour la symétrie par rapport à F (comment ces applications seraient-elles définies ? ? ?)

DÉFINITION 8
Soit F un sous-espace de l'espace euclidien E.
- La *projection orthogonale* sur F est la projection sur F dans la direction $F^\perp$.
- La *symétrie orthogonale* par rapport à F est la symétrie par rapport à F dans la direction $F^\perp$.

REMARQUES 17
- Pour que ces définitions aient un sens, il était crucial d'avoir $E = F \oplus F^\perp$.
- Comme toujours, les projections et symétries se déduisent l'une de l'autre par la relation $s = 2p - \mathrm{Id}$ à savoir retrouver très rapidement à l'aide d'un dessin...
- En pratique, pour calculer $p(x)$ ou $s(x)$ (au choix, d'après la remarque précédente), on calcule la projection y sur le plus petit espace dont on connait une base $(e_1, \ldots, e_k)$, si possible orthogonale ! On obtient les conditions d'orthogonalité en annulant les produits scalaire $<x - y|e_i>$.
- Si F est un sous-espace de E et $x_0 \in E$, les distances $\|x_0 - y\|$ entre x_0 et les éléments y de F sont minorées par $\|x_0 - y_0\|$ (où y_0 est le projeté orthogonal de x_0 sur F), qui est donc un minimum : on parle de la *distance de* x_0 *à* F.

DÉFINITION 9
Si s est la symétrie orthogonale par rapport à une droite, on parle de *retournement* ; si c'est par rapport à un hyperplan, on parle de *réflexion*.

EXERCICE 9 *Donner les matrices d'un retournement et d'une réflexion dans des bases "adaptées". En déduire leur trace et leur déterminant, en fonction de* $n = \dim E$.

3.4 Matrices et produits scalaires

DÉFINITION 10
Si φ est un produit scalaire sur E et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice de terme général $m_{i,j} = <e_i|e_j>$:

$$Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} <e_1|e_1> & <e_1|e_2> & \ldots & <e_1|e_n> \\ <e_2|e_1> & <e_2|e_2> & \ldots & <e_2|e_n> \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ <e_n|e_1> & <e_n|e_2> & \ldots & <e_n|e_n> \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 3 *Si* $\mathcal{B}$ *est orthonormée, alors* $Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$. *Dans le cas où* $\mathcal{B}$ *n'est que orthogonale,* $Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$ *est diagonale.*

Questions naturelles :
- A quoi ça sert ?
- Si ça sert à quelque chose (!), comment trouver la matrice du produit scalaire dans une base f connaissant celle dans une première base e ainsi que la matrice de passage de e vers f ?

Les deux résultats suivants répondent à ces questions...

PROPOSITION 8 *Si* $A = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$, $X = Mat_{\mathcal{B}}(x)$ *et* $Y = Mat_{\mathcal{B}}(y)$, *alors* $\varphi(x, y) = {}^tXAY$.

PREUVE : Calculer les deux membres en fonction des x_i et y_j ! ∎

Remarques 18

- On identifie la matrice $(1,1)$ dont l'unique entrée est α, et le réel α.
- Notons que si ${}^tXAY = {}^tXBY$ pour toutes matrices colonnes X et Y, alors $A = B$ (prendre de bonnes matrices X et Y). Si $\varphi(x,y) = {}^tXAY$ pour tout $x, y \in E$, cela permet donc d'affirmer que A est LA matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 9 *Si $A = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$, $A' = Mat'_{\mathcal{B}}(\varphi)$, et $P = \underset{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}{Pas}$, alors :*

$$A' = {}^tPAP.$$

Preuve : On prend $x, y \in E$, on exprime le produit scalaire $<x|y>$ à l'aide des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et on utilise la remarque 18. Attention, il faut se souvenir qu'avec les notations précédentes, si $X = Mat_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = Mat_{\mathcal{B}'}(x)$, alors $X = PX'$, et pas le contraire... ■

On voit dès maintenant apparaître une classe particulière de matrices, qui jouent un rôle privilégié dans les espaces euclidiens :

Proposition 10 *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, avec $\mathcal{B}$ orthonormée et $P = \underset{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}{Pas}$; alors : $\mathcal{B}'$ est orthonormée si et seulement si ${}^tPP = I_n$.*

Preuve : Regarder les matrices du produit scalaire dans les deux bases ! ■

Définition 11

Une matrice carrée M est dite *orthogonale* lorsqu'elle vérifie ${}^tMM = I_n$. $O_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonales.

Remarques 19

- D'après la proposition 10, les matrices orthogonales sont donc les matrices de passages entre les bases orthonormées
- Une matrice orthogonale a un déterminant qui vaut soit 1 soit -1 : pourquoi ?

3.5 Orientation de l'espace

Orienter un espace euclidien consiste à déclarer directes ou indirectes les bases orthonormées de cet espace : on commence par choisir une base de référence qui est déclarée directe, puis on oriente les autres en fonction de leur matrice de passage avec la base de référence.

Définition 12

Soit E un espace euclidien de base orthonormée $\mathcal{B}_0$. On *oriente* E à l'aide de $\mathcal{B}_0$ en déclarant *directes* les bases orthonormées $\mathcal{B}$ de E telles que $\underset{\mathcal{B}_0\to\mathcal{B}}{Pas}$ est de déterminant 1 (en particulier $\mathcal{B}_0$), et *indirectes* les autres.

Exemple 4 *$\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique est habituellement orienté à l'aide de la base canonique qui est déclarée directe. Pour $n = 3$, les bases orthonormées (e_2, e_3, e_1) et $(-e_3, e_1, -e_2)$ sont alors directes, alors que la base (e_2, e_1, e_3) est indirecte.*

Remarque 20 Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, elles ont même orientation si et seulement si $\underset{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}{Pas}$ est de déterminant 1. Pourquoi ?

On peut également orienter un hyperplan en se fixant un vecteur normal :

DÉFINITION 13
On suppose E orienté par une base $\mathcal{B}_0$. Soit H un hyperplan de E et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à H (de sorte que $E = H \oplus \mathbb{R}\overrightarrow{n}$: pourquoi ?). On oriente H relativement à $\overrightarrow{n}$ en déclarant directes les bases orthonormées $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de H telles que la base $\left(e_1, \dots, e_{n-1}, \frac{\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|}\right)$ de E est orthonormée directe.

REMARQUE 21 Si une base $\mathcal{B}$ de H est directe relativement à $\overrightarrow{n}$, elle est indirecte relativement à $-\overrightarrow{n}$: pourquoi ?

Ce type d'orientation interviendra dans les questions d'*angle* de rotation de $\mathbb{R}^3$.

3.6 Dualité dans les espaces euclidiens

On commence par une évidence, liée à la définition des produits scalaires :

FAIT 3 *Si on fixe $x_0 \in E$, alors l'application $x \in E \mapsto <x_0|x>$ est une forme linéaire. On note φ_{x_0} cette forme linéaire.*

PROPOSITION 11 Théorème de représentation
L'application $\varphi \left\| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ x_0 & \longmapsto & \varphi_{x_0} \end{array} \right.$ *est un isomorphisme.*

En particulier, si f est une forme linéaire, alors il existe un unique $x_0 \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \qquad f(x) = <x|x_0> .$$

PREUVE : Montrer soigneusement la linéarité et l'injectivité, et regarder les dimensions. On ne confondra pas φ, φ_{x_0}, et $\varphi_{x_0}(x)$, BIEN ENTENDU... ■

COROLLAIRE 3 *Si H est un hyperplan de E, alors il est de la forme $v^\perp$, pour un certain vecteur non nul $v \in E$.*

EXERCICE 10 *Soient f et g deux formes linéaires sur un espace euclidien E, avec* $\ker f = \ker g$*. Montrer qu'elles sont proportionnelles.*

REMARQUE 22 Ce résultat reste vrai en dimension quelconque, comme on l'a vu dans le chapitre d'algèbre linéaire...