PCSI - Lycée Champollion **TP Maple n^o 3**

Les 25 Novembre, 2 et 9 Décembre 2005

Des courbes paramétrées, et des systèmes dynamiques instables

`http://stephane.gonnord.org/`

Avant de commencer le TP, on sortira feuilles de papier de brouillon et crayons ; puis on sauvera immédiatement sa feuille de travail dans son répertoire personnel.

1 Des courbes paramétrées

L'objectif de cette partie est d'utiliser intelligemment Maple pour visualiser une courbe paramétrée, et étudier les inflexions par la calcul assisté.

Maple : plot, factor, D, simplify, subs, evalf, diff, numer, solve

1.1 Paramétrisation cartésienne

1. On s'intéresse à la courbe Γ_1 d'équation paramétrée $\begin{cases} x(t) &= \sin\dfrac{t}{2} \\ y(t) &= \tan t \end{cases}$
   (a) Représenter Γ_1.
   (b) Evaluer "à vue" le nombre de points d'inflexions.
   (c) Calculer le produit mixte $pm(t) = [\overrightarrow{V_t}, \overrightarrow{a_t}]$ et le factoriser. On pourra par ailleurs "suggerer" à maple d'utiliser $u = \tan\dfrac{t}{2}$, à l'aide de `subs({tan(t/2)=u,tan(t)=2*u/(1-u^2),...},pm(t))` et conclure !
2. On s'intéresse cette fois à la courbe Γ_2 d'équation $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{e^t}{t} \\ y(t) &= te^t \end{cases}$ Reprendre l'étude précédente.
3. On s'intéresse enfin à la courbe Γ_3 (dite *rationnelle*) d'équation $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t}{t^2-1} \\ y(t) &= \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}$
   (a) Représenter Γ_3.
   (b) Prévoir les changements d'inflexion, et les vérifier.
   (c) Calculer les coordonnées du point double (un point par lequel la courbe passe deux fois).

1.2 Paramétrisation polaire

1. Représenter la courbe Γ_4 d'équation polaire $\rho = 1 + \sin(3\theta)$.
2. Représenter la courbe Γ_5 d'équation polaire $\rho = 2\cos\theta + \sin\theta$. Ça ressemble à quoi, ce bidule ?

3. Représenter la courbe Γ_6 d'équation polaire $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{\theta}}\cdot$ On prouvera (en calculant avec maple le produit mixte $[\overrightarrow{V_\theta}, \overrightarrow{a_\theta}]$) que la courbe possède exactement un point d'inflexion.
4. Représenter enfin la courbe Γ_7 d'équation polaire $\rho = \ln\theta$.
   Pour cette dernière courbe, on prouvera l'existence d'un point d'inflexion, en admettant l'unicité (mais en s'en convaincant avec maple !).

► Les Maths derrière : *Aspects cinématiques des courbes paramétrées ; signification géométrique du signe de $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{a}]$; formules $\overrightarrow{V_\theta}\begin{pmatrix}\rho' \\ \rho\end{pmatrix}_{RT}$ et $\overrightarrow{a_\theta}\begin{pmatrix}\rho''-\rho \\ 2\rho'\end{pmatrix}_{RT}$.*

2 Des systèmes dynamiques instables

Ici, on s'intéresse aux suites vérifiant une relation de récurrence linéaire. On va voir qu'une telle suite peut converger théoriquement, mais diverger dès qu'on la calcule numériquement.

Maple : rsolve, seq

2.1 Calcul exact

1. Donner la valeur du terme général u_n de la suite u de premiers termes $u_0 = -3$, $u_1 = 4$, et vérifiant la relation :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = \frac{9}{2}u_{n+1} + \frac{5}{2}u_n + 7\cdot$$
2. Même chose avec cette fois les conditions initiales $u_0 = -3$ et $u_1 = -\dfrac{1}{4}\cdot$
3. Pour quelles conditions initiales (u_0, u_1) la suite u converge-t-elle ? Que vaut alors la limite ?

2.2 Calcul numérique

1. Ecrire une fonction `u` calculant u_n, avec $u_0 = -3$, $u_1 = 4$, et $u_{n+2} = \dfrac{9}{2}u_{n+1} + \dfrac{5}{2}u_n + 7$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Observer les 10 premiers termes, puis le centième. Pour nous assurer un calcul *numérique* et non exact, on donnera `-3.0` comme valeur de u_0, plutôt que `-3`, forçant ainsi tous les calculs suivants en `float`.
2. Recommencer cette fois avec la même relation de récurrence, mais les conditions initiales $u_0 = -3$ et $u_1 = -\dfrac{1}{4}\cdot$ Observer les 10 premiers termes, puis les 23 premiers termes. Ouvrir de grands yeux.
3. Augmenter la précision des calculs (valeur de `Digits`), et observer.
4. *Optionnel : pour* `Digits=1000`*, à partir de quel n le comportement de* `u(n)` *devient-il étrange ?*
5. Expliquer[1].

[1] Ou bien écouter les explications de l'éminent orateur...

2.3 Un ordre de plus

On s'intéresse cette fois aux suites vérifiant la récurrence linéaire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+3} = \frac{19}{6}u_{n+2} - \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

1. Donner la valeur exacte de u_n avec les conditions initiales $(u_0, u_1, u_2) = (1, 1, 1)$ puis $(u_0, u_1, u_2) = (2, 4, 1)$. Donner les limites éventuelles de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Dans le second cas, écrire une fonction `u` calculant numériquement u_n et observer les 25 premiers termes.
3. Résoudre formellement cette récurrence sans condition initiale. Décrire mathématiquement (géométriquement) l'ensemble des $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels qu'avec les conditions initiales $u_0 = a$, $u_1 = b$ et $u_2 = c$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Donner alors la valeur de la limite.
4. Comment ai-je fait pour construire cette relation de récurrence ?
5. (Beaucoup) plus difficile : donner une condition nécessaire et suffisante simple sur $P = X^3 - \alpha X^2 - \beta X - \gamma$ pour que toutes les suites u vérifiant la récurrence linéaire

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+3} = \alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} + \gamma u_n + \delta$$

   convergent. Montrer alors que le calcul numérique est “asymptotiquement stable”.

► Les Maths derrière : *Suites géométriques, récurrences linéaires doubles : les suites vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ sont les combinaisons linéaires de λ_1^n et λ_2^n, avec λ_1 et λ_2 les racines de $X^2 - aX - b$. En cas de racine double λ_0, les solutions sont les CL de λ_0^n et $n\lambda_0^n$.*