Notions de base

Exercice 1

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(y)$;
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(y)$;
- $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x < y \quad$ et $\quad f(x) > f(y)$;
- $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x < y \quad$ et $\quad f(x) \geq f(y)$.

Exercice 2

$\Longrightarrow$ est évident.
$\Longleftarrow$: on suppose $X \cup Y = X \cap Y$; on montre *soigneusement* $X \subset Y$. Pour $Y \subset X$, on le refait soigneusement ou bien on dit "de même".

Exercice 3

$\mathcal{P}(\{2,3\}) = \big\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\big\}$, puis $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\{2,3\})\big)$ contient $2^4 = 16$ éléments, dont $\emptyset, \{\emptyset\}, \big\{\{2\}\big\}, \big\{\emptyset, \{2,3\}\big\}\dots$

Exercice 4

- Si X est élément de $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$: ou bien $X \in \mathcal{P}(A)$, et alors $X \subset A$, donc $X \subset A \cup B$, et $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$; ou bien $X \in \mathcal{P}(B)$, et on arrive à la même conclusion ! On a donc $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$
  Bien entendu, si $A = B$, l'autre inclusion est vérifiée ; mais ce n'est pas le cas en général : si on prend $A = \{1,2\}, B = \{3,4\}$, et $X = \{1,3\}$, alors $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$ mais $X \notin \mathcal{P}(A)$ et $X \notin \mathcal{P}(B)$, donc $X \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
  Exercice complémentaire : montrer qu'il y a égalité si et seulement si $A = B$.
- On montrera cette fois l'égalité $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Faire *soigneusement* les deux inclusions.

Exercice 5

- $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$; $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$;
- $f([0,\pi/2[) =]0,1]$;
- $f^{-1}(1) = \{2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$, que l'on *note* $2\pi\mathbb{Z}$;
- $f^{-1}(]-1,2[) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$;
- $f([0,\pi]) = [-1,1]$ donc $f^{-1}\big(f([0,\pi])\big) = \mathbb{R}$
- $f([0,\pi/2]) = [0,1]$ donc $f^{-1}\big(f([0,\pi/2])\big)$ est constitué de la réunion des intervalles de la forme $[-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi]$, pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$f^{-1}\big(f([0,\pi/2])\big) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \big[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\big].$$

Exercice 6

- $\subset$: soit $y \in f\big(A \cap f^{-1}(B)\big)$. Il existe $x \in A \cap f^{-1}(B)$ tel que $f(x) = y$. $x \in A$ donc $y =\in f(A)$; et $x \in f^{-1}(B)$ donc $y = f(x) \in B$. Ainsi $y \in f(A) \cap B$.
- $\supset$: soit $y \in f(A) \cap B$. Puisque $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Maizalors $f(x) = y \in B$, donc $x \in f^{-1}(B)$. Ainsi, $x \in A \cap f^{-1}(B)$, puis $y \in f\big(A \cap f^{-1}(B)\big)$.

■

Exercice 7

- Par une étude de fonction de type terminale[1], on voit que f_1 induit une bijection décroissante de $\mathbb{R}^-$ sur$[-1,1[$ et une bijection croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $[-1,1[$. f_1 est donc non injective ($f(-1) = f(1)$) et non surjective (1515 n'a pas d'antécédent).

[1] l'écriture $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2+1}$ permet d'ailleurs de faire cette étude "à vue"

- On FIXE $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ (celui de droite !) et on CHERCHE $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_2(x,y) = (X,Y)$, c'est à dire $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x+3y & = & X \\ x+2y & = & Y \end{array} \right.$ On montre que ce système est **EQUIVALENT** à $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -3Y+2X \\ y & = & 2Y-X \end{array} \right.$
  Le sens $\Longrightarrow$ assure qu'il n'y a qu'une seule solution (EVENTUELLE !). Le sens $\Longleftarrow$ assure que si l'on prend $x = -2Y + 2X$ et $y = 2Y - X$, alors on a bien $X = 2x + 3y$ et $Y = x + 2y$. Ainsi, (X,Y) admet un unique antécédent, et f_2 est bijective.
- Supposons $f_3(x_1,y_1) = f_3(x_2,y_2)$, alors $2^{x_1}(2y_1+1) = 2^{x_2}(2y_2+1)$. Supposons dans un premier temps $x_1 \geq x_2$; on récupère alors $2^{x_1-x_2}(2y_1+1) = 2y_2+1$. Or, le membre de droite est toujours impair, donc $x_1 - x_2 = 0$, par suite $y_1 = y_2$. Le raisonnement avec $x_1 \leq x_2$ conduit au même résultat. Finalement $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ et f_3 est injective.
  La surjectivité est plus délicate. On fixe $n \in \mathbb{N}$, et il s'agit de montrer qu'il existe $(x,y) \in \mathbb{N}^2$, tel que $n = 2^x(2y+1) - 1$, soit encore (astuce !) $n+1 = 2^x(2y+1)$. Notons x la puissance de 2 dans la décomposition de $n+1$ en facteurs premiers. On a alors $n+1 = 2^x z$ avec z impair, donc de la forme $2y+1$ pour un certain $y \in \mathbb{N}$; d'où la surjectivité.
- f_4 est visiblement injective, par contre elle n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent.
- f_5 n'est pas injective : $f(0) = f(1)$; elle est surjective (un antécédent de $n \in \mathbb{N}$ est $n+1$).
- $f_5 \circ f_4 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ est une bijection ; $f_4 \circ f_5$ n'est pas injective ($f(0) = f(1)$) et pas surjective (0 n'a pas d'antécédent).

Exercice 8

- $\Longrightarrow$: Supposons f injective. L'inclusion $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$ est générale (voir le cours ; elle n'utilise pas l'injectivité de f). Pour l'inclusion inverse, fixons $x \in f-1\big(f(A)\big)$ alors $f(x) \in f(A)$ donc il existe $z \in A$ tel que $f(x) = f(z)$. Par injectivité de f, on récupère $x = z$ donc $x \in A$.
  $\Longleftarrow$: Supposons que pour tout $A \subset E$, $A = f^{-1}\big(f(A)\big)$. Supposons également $f(x) = f(y)$. Alors avec $A = \{x\}$, on obtient $f^{-1}\big(f(\{x\})\big) = \{x\}$. Or $f(y) = f(x) \in f(\{x\})$, soit $y \in f^{-1}\big(f(\{x\})\big) = \{x\}$ donc, finalement, $y = x$, et f est injective.
- $\Longrightarrow$: Supposons f surjective. L'inclusion $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$ est générale (voir le cours ; elle n'utilise pas la surjectivité de f). Pour l'inclusion inverse, prenons $y \in B$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Puisque $f(x) \in B$, on a $x \in f^{-1}(B)$, et finalement $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$.
  $\Longleftarrow$: Supposons que pour tout $B \subset F$, $B = f^{-1}\big(f(B)\big)$ et fixons $y \in F$. $B = \{y\}$ fournit $f\big(f^{-1}(\{y\})\big) = \{y\}$. Il existe donc $x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que $f(x) = y$, et f est surjective.
- $\Longrightarrow$: Supposons f injective. L'inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ est vraie pour toute fonction (on n'utilise pas l'injectivité). Pour obtenir l'autre inclusion, on fixe $y \in f(A) \cap f(B)$, alors $y \in f(A)$ fournit l'existence de x_1 dans A, tel que $f(x_1) = y$ et $y \in f(B)$ celle de x_2 dans B, tel que $f(x_2) = y$. L'injectivité de f fournit alors $x_1 = x_2 = x \in A \cap B$ et donc $y = f(x) \in f(A \cap B)$. ■

  $\Longleftarrow$: Supposons que pour tout $A, B \subset E$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Prenons $x_1 eq x_2$ dans E. On a alors $\{x_1\} \cap \{x_2\} = \emptyset$. Avec $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$, on obtient $\emptyset = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\})$ d'où $f(x_1) eq f(x_2)$, et l'injectivité suit.

Exercice 9

Notations : $f : E \to F$ et $g : F \to G$

Supposons $g(y_1) = g(y_2)$. Comme f est surjective, il existe (x_1, x_2) dans E^2, tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$) Donc $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ d'où ($g \circ f$ étant injective), $x_1 = x_2$, puis $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$, et g est injective.

Exercice 10

Notations : $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$

D'après le cours, $g \circ f$ injective implique f injective, et $g \circ f$ surjective implique g surjective. Le même raisonnement sur $h \circ g$ donne aussitôt g injective et h surjective. D'où g bijective et donc $g^{-1} \circ (g \circ f) = f$ aussi. La composition de $h \circ g$ par g^{-1} à droite fournit la bijectivité de h.

Exercice 11

- Si $A \not\subset B$, alors il n'existe pas de partie X telle que $A \cup B = B$ (pourquoi ?).

– Si $A \subset B$, alors $(B \setminus A) \cup Y$ où $Y \subset A$ convient. Réciproquement, supposons $A \cup X = B$, et posons $Y = X \cap A$. Alors d'une part $X \subset (B \setminus A) \cup Y$ (un élément de X est aussi un élément de Y), et d'autre part $(B \setminus A) \cup Y \subset X$ (car un élément de $(B \setminus A) \cup Y$ est soit un élément de Y, donc de X, soit un élément de $B \setminus A$, donc de X). Donc $X = (B \setminus A) \cup Y$.
  Finalement, les parties cherchées sont les $(B \setminus A) \cup Y$, où Y décrit $\mathcal{P}(A)$.

Exercice 12

– Supposons f injective, et fixons un élément $x_0 \in E$. Soit $y \in F$: il a 0 ou 1 antécédent par f. Dans le premier cas, on pose $g(y) = x_0$ (en fait, n'importe quel élément de E), et dans le second cas, on pose $g(y) =$ l'antécédent de y par f.
  Il est alors immédiat de vérifier que pour tout $x \in E$, on a $g\big(f(x)\big) = x$ (en effet, $f(x)$ a un antécédent par f... qui est x).
– Si f est surjective et $y \in F$, il suffit de prendre pour $g(y)$ UN des antécédents de y par f (il en existe bien au moins un, par surjectivité de f).

Exercice 13

1. – Supposons $A \cup B eq E$: il existe $x_0 \in E$ qui n'est ni dans A ni dans B. On a alors $f(\{x_0\}) = (\emptyset, \emptyset) = f(\emptyset)$, et f n'est pas injective. Par la contraposée, on vient de montrer que si f est injective, alors $A \cup B = E$.
   – Réciproquement, supposons $A \cup B = E$. Si $f(X_1) = f(X_2)$, alors $X_1 \cap A = X_2 \cap A$ et $X_1 \cap B = X_2 \cap B$. Mais on a (pourquoi ?) :
   $$X_1 = (X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B) = (X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B) = X_2,$$
   et f est injective.
2. De même, on montrera que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 14

– Prenons un élément de $(E \cup F) \times G$: il est de la forme (h, g), avec $h \in E \cup F$ et $g \in G$. Si $h \in E$, alors $(h, g) \in E \times G$ donc a fortiori $(h, g) \in (E \times G) \cup (F \times G)$. Sinon, on a nécessairement $h \in F$, et alors $(h, g) \in F \times G$ puis $(h, g) \in (E \times G) \cup (F \times G)$. Ainsi : $(E \cup F) \times G \subset (E \times G) \cup (F \times G)$.
  Réciproquement, considérons un élément de $(E \times G) \cup (F \times G)$: il est ou bien de la forme (e, g) avec $e \in E$ et $g \in G$, ou bien de la forme (f, g) avec $f \in F$ et $g \in G$. Dans les deux cas, il est dans $(E \cup F) \times G$. Ainsi, $(E \times G) \cup (F \times G) \subset (E \cup F) \times G$, et il y a égalité des deux ensembles.
– On montrera de même : $(E \cap F) \times G = (E \times G) \cap (F \times G)$.

Exercice 15

Les deux ensembles sont non homogènes !!!

$\mathcal{P}(E \times F)$ est un ensemble constitué d'ensembles de couples, alors que $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ est un ensemble constitué de couples d'ensembles...

On aura donc du mal à prouver la moindre inclusion !

Exercice 16

Comment construire une application Φ de $X^{Y \times Z}$ dans $(X^Y)^Z$? Déjà en FIXANT un élément de $X^{Y \times Z}$ (on va l'appeler f), et en essayant de construire un élément de $(X^Y)^Z$, qu'on appelera g (on posera alors $\Phi(f) = g$).

Qu'est-ce qu'un élément de $(X^Y)^Z$? Une application de Z dans X^Y. Il convient donc de définir $g(z)$, pour tout $z \in Z$.

On va donc fixer $z \in Z$. $g(z)$ doit être un élément de X^Y, donc une fonction de Y dans X. Pour la définir, il faut donc fixer y, et définir $\big(g(z)\big)(y)$. Que pourrait-on prendre comme élément de X ??? Au fait, f est une application de $Y \times Z$ dans X : on peut donc essayer de prendre $\big(g(z)\big)(y) = f(y, z)$, qui est bien dans X. On définit ainsi $g(z)$ pour tout z, donc g.

A chaque élément f de $X^{Y \times Z}$, on peut donc associer un élément $\Phi(f)$ de $(X^Y)^Z$.

Φ est donc une application de $X^{Y \times Z}$ dans $(X^Y)^Z$.

On laisse au lecteur le soin de montrer que cette application est bijective.

On distinguera bien la partie injectivité de la partie surjectivité ; on donnera des noms pertinents aux objets, en se posant toujours les questions : quelle est la nature de cet objet ? qu'est-ce qui est fixé à cet instant précis ? comment montrer l'égalité de deux objets de cette nature ?

Note : *les informaticiens frimeurs appellent* Φ *l'opérateur de Curryfication.*

Exercice 17

Supposons qu'il existe une surjection φ de X dans $\mathcal{P}(X)$, et considerons $Y_0 = \{y \in X \mid y \notin \varphi(y)\}$. Y_0 est une partie de X, donc est de la forme $\varphi(y_0)$ pour un certain $y_0 \in X$ (surjectivité de φ). Maintenant :

- si $y_0 \in Y_0$, alors $y_0 \notin \varphi(y_0)$ (définition de Y_0), donc $y_0 \notin Y_0$: contradiction, et ainsi on n'a pas $y_0 \in Y_0$;
- si $y_0 \notin Y_0$, alors $y_0 \in \varphi(y_0)$ (définition de Y_0), donc $y_0 \in Y_0$: contradiction, et ainsi on n'a pas $y_0 \notin Y_0$.

Ainsi, $y_0 \in Y_0$ est impossible, de même que $y_0 \notin Y_0$: cela pose problème... et nous fournit la contradiction souhaitée.