Complexes

Exercice 1 Si $z, z' \in \mathbb{C}$, montrer l'égalité suivante et donner son interprétation géométrique :

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Exercice 2 Soient $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ ($n \geq 2$).
- Montrer :
$$\Big|\sum_{k=1}^{n} z_k\Big| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k| .$$
- Montrer qu'il y a égalité si et seulement si tous les z_i sont nuls, ou bien s'il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$tel que $z_{i_0} \neq 0$ et tous les z_i (pour $i \neq i_0$) sont de la forme $\lambda_i z_{i_0}$, où $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 3 Résoudre $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

Exercice 4 Module et argument des complexes suivants :
- $(1+i)^{2n}$;
- $(1+j)^{2n}$ (avec $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$) ;
- $\Big(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\Big)^{1515}$;
- $\dfrac{(1+i\tan\alpha)^2}{1+\tan^2\alpha}$;
- $\dfrac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}$.

Exercice 5
- Montrer que $z \mapsto \dfrac{1+z}{1-z}$ induit une bijection de $\mathbb{U} \setminus \{1\}$ sur $\mathbb{R}i$.
- De même, montrer que $z \mapsto \dfrac{1+iz}{1-iz}$ induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

Exercice 6 Exprimer $\cos 3\theta \sin 6\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 7
- Exprimer $\cos^{2p} x$ et $\cos^{2p+1} x$ à l'aide de termes linéaires en $\cos kx$.
- Même chose avec le sinus.

Exercice 8 Donner une forme simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \cos kx$.

Exercice 9 Montrer :

$$\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}.$$

On pourra considérer les racines de $z^{11} = -1$.

Exercice 10 Résoudre algébriquement les équations $z^2 = z_0$, lorsque z_0 vaut $2+i, 4i-3, 8i-15$ et $9+40i$.

Exercice 11 Résoudre $27(z-i)^6-(z+1)^6=0$. Donner des expressions algébriques (forme $a+bi$) des solutions.

Exercice 12 Résoudre l'équation suivante, sachant qu'il y a une solution imaginaire pure :

$$(i-1)z^3-(5i-11)z^2-(43+i)z+9+37i=0.$$

Exercice 13

- Trouver les solutons complexes de $z^4+z^3+z^2+z+1=0$.
- Si z est une des solutions précédentes et $x=z+1/z$, montrer que x vérifie une équation simple.
- En déduire une expression algébrique de $\cos\dfrac{2\pi}{5}\cdot$

Exercice 14 soient $a,b,c\in\mathbb{R}$. Résoudre le système d'inconnues x,y,z :

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & a \\ x & + & jy & + & j^2z & = & b \\ x & + & j^2y & + & jz & = & c \end{cases}$$

Donner une CNS simple pour que les solutions soient réelles.

Exercice 15 Déterminer l'ensemble des $z\in\mathbb{C}$ tels que $\arg\dfrac{z-2}{z+i}=\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

On pourra raisonner géométriquement, et faire intervenir $A(-i)$, $B(2)$, $M(z)$, ainsi que le cercle passant par A et B, et dont le centre Ω vérifie $(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})=\dfrac{\pi}{2}\cdot$