Fonctions convexes

Table des matières

Dans tout ce chapitre, on s'intéresse à des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 1 *Représenter sur un axe horizontal les réels suivants :*

$$1024;\ \ 1515;\ \ 0,5*1024+0,5*1515;\ \ 0,01*1024+0,99*1515;$$

$$0,99*1024+0,01*1515; -0,01*1024+1,01*1515; 1,01*1024-0,01*1515.$$

EXERCICE 2 *Soit D la droite passant par les points $A(a,y_1)$ et $B(b,y_2)$. Soit $\lambda\in]0,1[$. Donner en fonction de λ, y_1 et y_2 l'ordonnée du point de D d'abscisse $\lambda a+(1-\lambda)b$.*

1 Propriétés des fonctions convexes

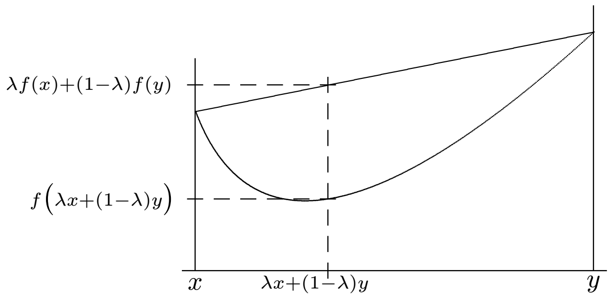
1.1 Définition des fonctions convexes

DÉFINITION 1
Une fonction $f:I\to\mathbb{R}$ est dite convexe lorsque :

$$\forall (x,y)\in I\ \forall\lambda\in[0,1],\qquad f\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y). \tag{1}$$

f sera dite concave si $-f$ est convexe.

L'interprétation graphique de l'inégalité (1) est aisée (cf exercices 1 et 2 !) : la courbe est située dessous ses cordes.



REMARQUE 1 On verra plus tard qu'en dehors de $[a,b]$, le graphe est situé DESSUS la sécante.

On montre par récurrence sur $n\geq 2$ que la définition 1 se généralise de la façon suivante :

PROPOSITION 1 *$f:I\to\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout entier $n\geq 2$, toute famille de points $(x_i)_{1\leq i\leq n}\in I^n$ et toute famille $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}\in[0,1]^n$* **de somme égale à 1**, *on a :*

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big)\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i). \tag{2}$$

En somme, l'image d'un barycentre (à coefficients positifs) est plus petite que le barycentre des images.

1.2 Inégalités de pentes

Les propriétés principales des fonctions convexes (tant sur le plan pratique que théorique) résident dans des inégalités entre des pentes.
Notation : *Si $x_0\in I$, p_{x_0} désigne la fonction définie sur $I\setminus\{x_0\}$ par :*

$$\forall x\in I\setminus\{x_0\},\qquad p_{x_0}(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

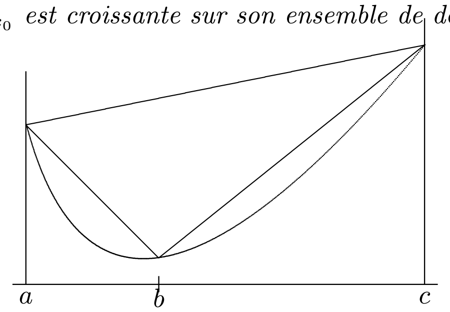
("fonction pente issue de x_0").
Le résultat qui suit est à connaître absolument, avec le dessin qui l'accompagne.

PROPOSITION 2 *Il y a équivalence entre :*

1. *f est convexe sur I.*
2. *Pour tout $(a,b,c) \in I^3$ tel que $a < b < c$, on a :*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}. \tag{2}$$

3. *Pour tout $x_0 \in I$, p_{x_0} est croissante sur son ensemble de définition.*



Pentes en jeu dans (2)

PREUVE : L'équivalence entre les deux derniers points est aisée. Pour le reste, le ressort essentiel est l'équivalence entre l'inclusion $b \in]a,c[$ et l'existence de $\lambda \in]0,1[$ tel que b s'écrive $\lambda a + (1-\lambda)c\ldots$ ■

COROLLAIRE 1 *Si A et B sont deux points du graphe de f, alors la droite (AB) privée du segment $[AB]$ est situé SOUS le graphe de f (dessin...).*

PREUVE : Soient a,b,c avec $a < b < c$: le point de (AB) d'abscisse c a pour ordonnée $f(a)+(c-a)p_a(b)$ qui est inférieure à $f(a)+(c-a)p_a(c)$ qui est justement $f(c)$. Même chose si $c < a$. ■

1.3 Régularité des fonctions convexes ($\pm$HP)

PROPOSITION 3 *Si f est convexe sur I et x_0 est à l'intérieur de I, alors f est dérivable à droite et à gauche en x_0, avec de plus $f'_g(x_0) \leq f'_d(x_0)$.*

PREUVE : "Pour regarder ce qui se passe à droite de x_0, on fixe un pivot à gauche de x_0" : cette idée est très souvent utile, quand on travaille avec des fonctions convexes. Il faut cependant avoir de la marge à gauche, donc x_0 ne doit pas être l'extrémité gauche de I...
Se souvenir également du théorème de la limite monotone, qu'on appliquera à p_{x_0}. ■

COROLLAIRE 2 *Si f est convexe sur I, alors f est continue à l'intérieur.*

EXERCICE 3 *Trouver une fonction convexe sur $[0,1]$ discontinue en 0 et 1.*

EXERCICE 4 *Soit f convexe sur I. Montrer que les fonctions f'_d et f'_g sont croissantes.*

1.4 Extrema des fonctions convexes

Pour des fonctions convexes, il y a équivalence entre minimum local et minimum global. La proposition suivante précise ceci.

PROPOSITION 4 *Soit f convexe sur I.*

1. *Si f admet un minimum local y_0, alors c'est un minimum global.*
2. *Si un minimum local (donc global) est atteint en deux points $x_1 < x_2$, alors f est constante sur $[x_1, x_2]$.*

PREUVE : Dessin, puis inégalités de pentes... ■

Le comportement vis-à-vis des maxima est totalement différent.

Proposition 5 *Si f convexe et continue sur un segment I, alors :*

1. *f admet un maximum global pris à une extrémité du segment ;*
2. *si ce maximum global est également pris à l'intérieur du segment, alors f est constante.*

Preuve : L'existence d'un maximum global est assurée par le fait qu'on a une fonction **continue** sur un segment. Si ce maximum n'est pris ni en a ni en b (avec $I = [a, b]$) mais en $c \in]a, b[$, alors le point $C\big(c, f(c)\big)$ du graphe de f est situé strictement sous la corde passant par $A\big(a, f(a)\big)$ et $B\big(b, f(b)\big)$, contredisant la convexité de f. ■

Remarque 2 f peut ne pas être continue aux bords, comme on l'a vu dans le paragraphe précédent. Cela dit, une étude un peu plus fine nous assure que les résultats précédents sont maintenus (le point clé étant que si f est monotone, ce n'est pas trop compliqué, et sinon, elle est nécessairement décroisante puis croissante, et ce n'est plus trop compliqué non plus).

1.5 Fonctions strictement convexes (±HP)

Définition 2
Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite strictement convexe si :

$$\forall (x, y) \in I \ \forall \lambda \in]0, 1[, \qquad f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \tag{1}$$

f sera dite strictement concave lorsque $-f$ est strictement convexe.

La stricte convexité permet d'obtenir des inégalités strictes.

Proposition 6 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Il y a équivalence entre :*

1. *f est strictement convexe sur I.*
2. *Pour tout $(a, b, c) \in I^3$ tel que $a < b < c$, on a :*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

3. *Pour tout $x_0 \in I$, p_{x_0} est strictement croissante sur son ensemble de définition.*

2 Cas des fonctions dérivables

2.1 Caractérisation des fonctions convexes dérivables

En pratique, pour montrer qu'une fonction est convexe, il est rare qu'on établisse l'inégalité (1). On utilise plutôt les caractérisations qui suivent. On comparera ces résultats aux résultats donnés dans le paragraphe 1.3.

Théorème 1 *Si f est dérivable, alors f est convexe si et seulement si f' est croissante. Dans le cas où f est deux fois dérivable, alors f est convexe si et seulement si $f''\geq 0$.*

Preuve : Interdit d'utiliser l'exercice 4… ■

Bien entendu, on en déduit une caractérisation des fonctions concaves dans le même cadre.
De même, une fonction dérivable sera strictement convexe si et seulement si f' est strictement croissante (ce qui ne signifie pas forcément $f'' > 0$, BIEN ENTENDU : cf $x \mapsto x^4$...).

2.2 De nouvelles inégalités de pentes

Les inégalités suivantes s'obtiennent lors de la démonstration du théorème précédent :

THÉORÈME 2 *Si f est dérivable convexe et $x_0, y_0 \in I$ avec $x_0 < y_0$, alors :*

$$f'(x_0) \leq \frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0} \leq f'(y_0).$$

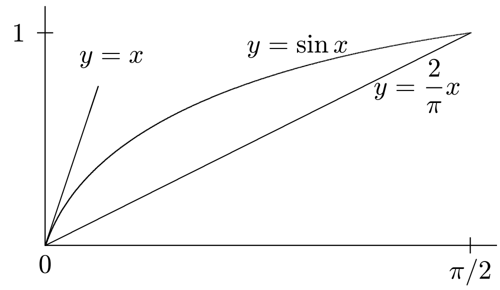
Dans la démonstration, on voit qu'il suffit que f admette une dérivée à droite (resp. gauche) en x_0 (resp. y_0).

3 Inégalités de convexité

3.1 ln, exp et sin

1. La fonction ln est strictement concave sur $\mathbb{R}_+^*$ (dériver deux fois), donc $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u \in]-1, +\infty[$.
2. De même, $e^u \geq 1 + u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.
3. La fonction sin est concave sur $[0, \pi/2]$, donc :

$$\forall t \in [0, \pi/2], \qquad \frac{2}{\pi} t \leq \sin t \leq t.$$



3.2 Autour de l'inégalité arithmético-géométrique

1. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels > 0 et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels positifs de somme égale à 1 ; alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}$ (concavité du logarithme ou convexité de l'exponentielle).
   Pour $n = 2$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$, on retrouve l'inégalité arithmético-géométrique.
2. Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $u, v > 0$. Alors $uv \leq \frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q$ ($x_1 = u^p$, $\lambda_1 = 1/p$,...)
   On en déduit de façon classique les deux résultats suivants :
3. *Inégalité de Hölder* : si p et q sont commme précédemment et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\Big)^{1/q}.$$

   (prendre $u = a_i/\alpha$, $v = b_i/\beta$ où $\alpha = \sum a_i^p$ et $\beta = \sum b_i^q$, et sommer les inégalités obtenues avec le résultat précédent)
   Pour $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
4. *Inégalité de Minkowsky* : si $p > 1$ et $x_i, y_i > 0$, alors :

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\Big)^{1/p}.$$

   On pose $p' = \frac{1}{1 - 1/p}$ (de sorte que $1/p + 1/p' = 1$), et on ajoute les deux inégalités obtenues en appliquant Hölder à $\sum x_i (x_i + y_i)^{p-1}$ et $\sum y_i (x_i + y_i)^{p-1}$.