Equations différentielles

Table des matières

1 Généralités

1.1 Solution d'une équation différentielle

Une équation différentielle, c'est une "équation" de la forme

$$F\big(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k)}(t)\big) = 0, \tag{1}$$

avec F une application de $\mathbb{R}^{k+1}$ dans $\mathbb{R}$.

EXEMPLE 1 *L'équation suivante est une équation du second ordre (les deux premières dérivées de y interviennent), linéaire (la dépendance en y et ses dérivées est linéaire ; celle en t, on s'en fiche) :*

$$(\sin t)y''(t) + 3t^2y'(t) + 5y(t) = 3t^2 - 5.$$

Quand on a une équation, on recherche en général des solutions... mais ici, qu'entend-on par *solution* ?

DÉFINITION 1
Une solution de (1) est un couple (I, y), avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et y une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, vérifiant (1) pour tout $t \in I$.

EXEMPLE 2 *L'équation $y' - y = 0$ admet $([0,1], \exp)$ comme solution, mais aussi $(\mathbb{R}, \exp)$. La première est d'ailleurs restriction de la seconde. De son coté, l'équation $y' = 1 + y^2$ n'admet pas de solution définie sur $\mathbb{R}$ (elle en admet sur n'importe quel intervalle ouvert de longueur π : pourquoi ?).*

DÉFINITION 2
Une solution (I, f) est dite *maximale* lorsqu'elle n'est restriction d'aucune autre.

EXEMPLES 3
- $\big(]10, 10 + \pi[, t \mapsto \tan(t - 10)\big)$ *est une solution maximale de $y' = 1 + y^2$.*
- *Un théorème dira plus tard que les équations linéaires du premier ordre $y'(t) = a(t)y(t)+b(t)$ admettent des solutions maximales définies sur tout $\mathbb{R}$.*
- *Un autre théorème (l'année prochaine) dira que dans des conditions raisonnables, les solutions maximales sont définies sur des intervalles ouverts.*

REMARQUE 1 A priori, les questions d'existence et d'unicité de solutions, maximales ou non, n'est pas trivial. On verra dans le cours des théorèmes positifs à ce sujet. Une autre question sera de trouver *explicitement* des (les/la) solution(s).

EXEMPLES 4
- *$y' = 2y$ admet une infinité de solutions maximales, définies sur $\mathbb{R}$. Il y a unicité de la solution si on impose une condition de la forme $y(1515) = 1024$. Sans cette condition, les solutions sont toutes proportionnelles : elles forment donc une droite vectorielle.*
- *L'équation $y' = e^y$ admet des solutions maximales définies sur des intervalles de la forme $]-\infty, \beta[$ avec $\beta \in \mathbb{R}$. IL N'EXISTE PAS de solution définie sur tout $\mathbb{R}$: cf TD.*
- *L'équation $y'^2 = 4y$ (qui n'est pas linéaire) admet exactement pour solution les applications de la forme*

  $$t \mapsto \begin{cases} (t-t_1)^2 & \text{si } t < t_1 \\ 0 & \text{si } t_1 \le t \le t_2 \\ (t-t_2)^2 & \text{si } t > t_2 \end{cases}$$

  avec $t_1 \le t_2$. On a donc "deux degrés de liberté", mais attention, les solutions ne constituent pas un espace affine ou vectoriel...

1.2 Problème de Cauchy

Un problème de Cauchy est la donnée d'une équation différentielle d'ordre p, et de p "conditions initiales" de la forme $y(t_0) = \alpha_0$, $y'(t_0) = \alpha_1, \dots, y^{(p-1)}(t_0) = \alpha_{p-1}$.

Exemples 5

- *Le problème* $(\mathcal{C}) \left\{ \begin{array}{l} y'' + 2ty' - 3y = t^2 + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array} \right.$ *admet une unique solution (théorème de quand vous serez grand)... dont on ne connait pas d'"expression simple".*
- $(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} y'' + \sin\big(y(t)\big) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \dfrac{1}{100} \end{array} \right.$ *admet une unique solution, qui est périodique. Si on change la seconde condition par* $y'(0) = 1000!$, *il existe encore une unique solution, mais non périodique. Vous voyez (qualitativement) pourquoi ?*

On verra (surtout l'année prochaine) que dans un cadre assez fréquent, les problèmes de Cauchy admettent en général une unique solution maximale définie sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2 Des conditions supplémentaires un peu différentes peuvent se poser, comme le problème suivant, sur un segment $[0, T]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(T) = 0 \end{array} \right.$$

Ce type de problème avec conditions "aux bords" est plus délicat, et réservé aux collègues de seconde année...

1.3 Cas des équations linéaires

Il s'agit d'équations de la forme

$$a_k(t)y^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)y^{(k-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t) \qquad (L)$$

où les a_i et b sont des applications continues sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle).

Exemple 6 *L'équation*

$$(sin^2 t)y'' + t^2 y = \cos t$$

est linéaire du second ordre. Noter qu'on écrit y *au lieu de* $y(t)$ *par paresse, mais attention, avec Maple, il faut mettre* $y(t)$...

Définition 3

- (L) est dite *homogène* lorsque b est la fonction nulle. D'ailleurs, si (L) n'est pas homogène, son "équation homogène associée" est l'équation (H) obtenue en remplaçant $b(t)$ par 0.
- (L) est dite *résolue* (terme très discutable...) si $a_k(t) = 1$ pour tout t.

Remarque 3 Bien entendu, si a_k ne s'annulle pas, alors, en divisant par $a_k(t)$, on retrouve une équation "résolue". Si a_k s'annulle en un point t_0, on doit résoudre le problème de façon indépendante à gauche et à droite, puis essayer de recoller les solutions...

La proposition suivante peut se montrer partiellement dès maintenant, et fournit la structure des ensembles $\mathcal{S}_L$ et $\mathcal{S}$, qui regroupent respectivement les solutions de (L) et (H).

Proposition 1

- *L'ensemble des solutions de* (H) *définies sur un même intervalle* I *constituent un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}^1(I)$.

- *Si (L) admet une solution f_0 sur I, alors l'ensemble des solutions est $f_0 + \mathcal{S}_H$: c'est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I)$.*

PREUVE : Le premier point est instantané. Le second n'est guère plus dur ... le vérifier tout de même ! ■

REMARQUES 4
- En fait, on peut *montrer* que $\mathcal{S}_L \neq \emptyset$[1] : il n'est donc pas utile de le supposer ...
- Lorsque (L) est résolue, $\mathcal{S}_L$ et $\mathcal{S}_H$ sont de dimension p (l'ordre de l'équation).

1.4 Un premier exemple traité de façon élémentaire

On va s'intéresser au problème de Cauchy $(\mathcal{C}) \left\{ \begin{array}{l} y' + 3y = 2t \\ y(2) = 5 \end{array} \right.$

- L'équation homogène (H) $y' + 3y = 0$ est équivalente (pourquoi ?) à $\left(\mathrm{e}^{3t}y(t)\right)' = 0$, ce qui est équivalent au fait que $\mathrm{e}^{3t}y(t)$ est constante (sur un intervalle). On obtient donc pour solutions *maximales* les applications $y : t \in \mathbb{R} \mapsto K\mathrm{e}^{-3t}$:
$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \mapsto K\mathrm{e}^{-3t} \,|\, K \in \mathbb{R} \right\}$$
Notons que si f_0 désigne l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{-3t}$, alors $\mathcal{S}_H = \mathbb{R}f_0$: c'est une droite vectorielle.
- Cherchons une solution particulière sous la forme $f_1 : t \mapsto at + b$ (pourquoi ? parce que ! attendre un peu...). (L) revient à : $3at + (3b + a) = 2t$. BIEN ENTENDU, les "ON PEUT IDENTIFIER" se feront massacrer ... Notons plutôt que la relation $(3a - 2)t + (3b + a) = 0$ doit être valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc le polynôme $(3a - 2)X + 3b + a$ admet une infinité de racines donc est nul, c'est-à-dire : $3a - 2 = 0$ et $3b + a = 0$, soit encore $a = \dfrac{2}{3}$ et $b = -\dfrac{2}{9}\cdot$ Ainsi, en notant $f_1 : t \mapsto \dfrac{2}{3}t - \dfrac{2}{9}$, on a :
$$\mathcal{S}_L = \left\{ t \mapsto f_1(t) + Kf_0(t) \,|\, K \in \mathbb{R} \right\} = f_1 + \mathbb{R}f_0.$$
- Cherchons maintenant $f \in \mathcal{S}_L$ telle que $f(2) = 5$, ce qui revient à chercher K tel que $f_1(2) + Kf_0(2) = 5$, soit $K = \dfrac{35}{9\mathrm{e}^{-6}}\cdot$ Ainsi, $\mathcal{C}$ admet une unique solution :
$$\mathcal{S}_C = \{ t \mapsto \frac{2}{3}t - \frac{2}{9} + \frac{35\mathrm{e}^6}{9}\mathrm{e}^{-3t} \}.$$
- Vérifications avec Maple :

```
> dsolve(D(y)(t)+3*y(t)=0,y(t));
                          y(t) = exp(-3 t) _C1

> dsolve(D(y)(t)+3*y(t)=2*t,y(t));
                   y(t) = 2/3 t - 2/9 + exp(-3 t) _C1

> dsolve({D(y)(t)+3*y(t)=2*t,y(2)=5},y(t));
                                         exp(-3 t)
                  y(t) = 2/3 t - 2/9 + 35/9 ---------
                                          exp(-6)
```

2 EDL du premier ordre

Il s'agit d'équations de la forme
$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t). \tag{E}$$
On rappelle que :

[1] théorème de Cauchy - cas linéaire

- si $\gamma(t) = 0$ pour tout t, on dit que l'équation est *homogène* ou "sans second membre" : terme discutable, complètement banni par certains, et exclusivement utilisé par d'autres.
- Si $\alpha(t) = 1$ pour tout t, on dit que l'équation est résolue.

Si α ne s'annulle pas, alors (E) est équivalente à :

$$y'(t) + \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} y(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}. \qquad (E')$$

qui est résolue. Par contre, si α s'annulle en un point t_0 par exemple, on est obligé de résoudre (E') à droite et à gauche de t_0, puis chercher les solutions de (E) en recollant les morceaux trouvés précédemment.

2.1 Equations résolues

On a ici une équation de la forme :

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \qquad (E)$$

avec a et b définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note (H) l'équation homogène associée.

Le résultat suivant donne la nature de l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions maximales de (H), et celui de $\mathcal{S}_L$ (solutions maximales de (L)).

Proposition 2
- *(L) et (H) admettent des solutions maximales définies sur I tout entier.*
- *$\mathcal{S}_H$ est une droite vectoriel (sous-espace de $\mathcal{C}^1(I)$ engendré par une fonction).*
- *$\mathcal{S}_E$ est une droite affine (partie de $\mathcal{C}^1(I)$ de la forme $f_0 + \mathbb{R}f_1$).*

Remarque 5 Un coup d'œil au rayon surgelé de son supermarché nous convaincra de l'existence de boîtes de patates cubiques. Mais attention : il ne faut pas confondre "boîte cubique de patates" et "boîte de patates cubiques". D'ailleurs, il existe des boîtes cubiques contenant des patates sphériques.

Bref, il ne faut pas confondre *contenant* et *contenu* : quand on dit que $\mathcal{S}_L$ est une droite affine, on ne dit pas que LES ELEMENTS de $\mathcal{S}_L$ (c'est-à-dire les solutions de (L)) sont des droites (ou fonctions) affines.

Cette mise au point étant faite, on ne verra jamais, c'est certain, la confusion.

Preuve : En notant A UNE primitive de a (l'existence est assurée par le théorème fondamental du calcul différentiel/intégral : a est continue) sur I, (H) est alors EQUIVALENTE à $\left(\mathrm{e}^{A(t)}y(t)\right)' = 0$, soit encore (comme I est un intervalle) : $t \mapsto \mathrm{e}^{A(t)}y(t)$ est constante sur I, et ainsi, en notant $y_0 : t \in I \mapsto \mathrm{e}^{-A(t)}$, on a $\mathcal{S}_H = \mathbb{R}y_0$.

D'après la proposition 1, il suffit d'exhiber UNE solution de (L). On peut la chercher sous la forme $t \mapsto K(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$. (L) revient alors à : $K'(t)\mathrm{e}^{-A(t)} = b(t)$: il suffit donc de prendre pour K UNE primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{A(t)}b(t)$ sur I, ce qui est possible car b est continue. ■

Remarques 6
- La méthode utilisée pour trouver la solution particulière s'appelle la méthode de "*variation de la constante*". Elle est utile en théorie comme on vient de le voir, mais aussi en pratique pour obtenir la forme explicite d'une solution.
- Les solutions non nulles de (H) ne s'annullent pas : par continuité, elles sont donc de signe strict constant. On peut donc en chercher une à valeurs strictement positives, ce qui permet de raisonner "à la physicienne" avec les $\dfrac{y'}{y} = (\ln y)' \ldots$

Le résultat précédent va nous assurer l'existence et l'unicité aux problèmes de Cauchy linéaires résolus du premier ordre :

Proposition 3 *Soit $\mathcal{C}$ le problème de Cauchy* $\left\{\begin{array}{l} y' + a(t)y(t) = b(t) \\ y(t_0) = Y_0 \end{array}\right.$ *avec $t_0 \in I$ et $Y_0 \in \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{C}$ admet une unique solution.*

Exemple 7 $(\mathcal{C})\left\{\begin{array}{l} y'+2t^3y(t)=3t^3 \\ y(0)=1\end{array}\right.$ *On cherche une solution* >0 *de* $\mathcal{S}_H$*, c'est-à-dire* $y\in\mathcal{C}_1$ *vérifiant* $\dfrac{y'}{y}=-2t^3$*, soit* $(\ln y)'=\left(-\dfrac{t^4}{2}\right)'$ *: il suffit donc de prendre* $y_0(t)=e^{-t^4/2}$*, et alors* $\mathcal{S}_H=\mathbb{R}y_0$*.*

On cherche une solution particulière $y_1(t)=K(t)e^{-t^4/2}$*, ce qui revient à chercher* y_1 *vérifiant* $K'=3t^3e^{-t^4/2}$ *: il suffit de prendre* $K(t)=\dfrac{3}{2}e^{t^4/2}$*, puis* $y_1(t)=\dfrac{3}{2}$ *et alors* $\mathcal{S}_E=y_1+\mathbb{R}y_0$*. Résoudre le problème de Cauchy* $(\mathcal{C})$ *revient alors à chercher* K *telle que* $(y_1+Ky_0)(0)=1$*, soit :* $K=-\dfrac{1}{2}\cdot$ *Ainsi :*

$$\mathcal{S}_C=\left\{t\in\mathbb{R}\mapsto\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-t^4/2}\right\}$$

Vérification Maple :

```
> dsolve({y(0)=1,D(y)(t)+2*t^3*y(t)=3*t^3},y(t));
                                            4
                    y(t) = 3/2 - 1/2 exp(- 1/2 t )
```

2.2 Equations $y'+ay=t^n\mathrm{e}^{\alpha t}$

La méthode de variation de la constante peut toujours être utilisée, mais on peut gagner du temps si on connaît a priori la tête du résultat souhaité : on peut alors rédiger la recherche d'une solution particulière par une phrase du type “je cherche une solution particulière de la forme $t\mapsto(at+b)\mathrm{e}^{-t}$;... ainsi, il suffit de prendre $a=1515$ et $b=2$”.

Dans le cas d'une équation de la forme $y'+ay=t^n\mathrm{e}^{\alpha t}$, on pourra chercher une solution particulière de la forme $P(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$, avec P une application polynômiale de degré n si $\alpha\neq-a$, et $n+1$ sinon.

Remarques 7

- Si le second membre est polynômial (resp. exponentiel), cela correspond au cas $\alpha=1$ (resp. $n=0$), et les résultats précédents restent valides !
- Le cas du *cos* peut se traiter en passant par un second membre de la forme e^{it} puis en prenant la partie réelle, ou bien en superposant avec une solution de l'équation conjuguée. A posteriori, les solutions seront de la forme $P_1(t)\cos t+P_2(t)\sin t$. Ne pas oublier qu'on cherche les solutions réelles, même si dans le calcul intermédiaire on passe par des solutions complexes.
- La condition $\alpha=-a$ est difficile à retenir : le fait plus marquant est que la partie exponentielle du second membre est solution de l'équation homogène.
- Dans le cas où $\alpha=-a$, l'expérience ou la réflexion nous assurent qu'on peut chercher le polynôme P sans terme constant (celui-ci disparaît quand on réinjecte). Le nombre de coefficients recherchés est donc le même que lorsque $\alpha\neq-a$.

2.3 Des exemples

Exemple 8 *Pour* $y'-2y=te^t$ *:* $y_0 : t\mapsto e^{2t}$ *dirige* $\mathcal{S}_H$*, et on cherche une solution particulière sous la forme* $t\mapsto(at+b)e^t$*. Il est alors (nécessaire et) suffisant de prendre* $a=b=-1$*.*

Exemple 9 *Pour* $y'-2y=te^{2t}$ *: on cherche une solution particulière sous la forme* $t\mapsto(at^2+bt)e^{2t}$*. Il est alors (nécessaire et) suffisant de prendre* $a=\dfrac{1}{2}$ *et* $b=0$*.*

Exemple 10 *Pour* $y'-2y=\cos t$*, on commence par chercher* y_1 *solution de* $y'-2y=e^{it}$ *: on le cherche sous la forme* $y_1(t)=Ke^{it}$ *et on trouve* $(i-2)K=1$*, soit* $K=\dfrac{1}{i-2}=\dfrac{1}{5}(-i+2)$*. Ensuite,* $y_2(t)=\dfrac{1}{5}(i+2)e^{-it}$ *est solution de* $y'-2y=e^{-it}$*.* $\dfrac{y_1+y_2}{2}$ *est alors solution de l'équation initiale. On pouvait également, sans* *passer par y_2, calculer directement la partie réelle de y_1, ou encore chercher directement une solution sous la forme $K_1 \cos t + K_2 \sin t$. Dans tous les cas, on trouve comme solution particulière :* $t \mapsto -\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t$.

2.4 Problèmes de recollement

On va voir deux problèmes de recollement : dans les deux cas, il y a un problème en un point. On va donc résoudre l'équation sur deux intervalles réels, puis regarder comment recoller les morceaux.

Dans le premier cas, on pourra recoller toute solution à gauche avec toute solution à droite (on aura donc au total deux degrés de liberté). Dans le second cas, il existera une unique solution. On peut très bien imaginer des cas où le recollement est impossible, ou encore : la solution retenue d'un coté impose celle de l'autre (on a plus que un degré de liberté).

EXEMPLE 11 $ty' - 4y = -6t^2$ *(E)*

On commence par résoudre l'équation sur $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ *et* $I_2 = \mathbb{R}_+^*$. *On trouve* $\mathcal{S}_{E,1} = \{t \in I_1 \mapsto 3t^2 + Kt^4 \,|\, K \in \mathbb{R}\}$ *et* $\mathcal{S}_{E,2} = \{t \in I_2 \mapsto 3t^2 + Kt^4 \,|\, K \in \mathbb{R}\}$. *Maintenant, une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$ est NECESSAIREMENT de la forme :*

$$y \longmapsto \begin{cases} 3t^2 + K_1 t^4 & \textit{si } t < 0 \ \textit{(car la restriction de } y \textit{ à } I_1 \textit{ est dans } \mathcal{S}_{E,1}) \\ 0 & \textit{si } t = 0 \ \textit{(revenir à l'équation initiale)} \\ 3t^2 + K_2 t^4 & \textit{si } t > 0 \ \dots \end{cases}$$

Reciproquement, si y est de la forme précédente, alors y vérifie clairement (E) sur $\mathbb{R}$... il reste en fait à regarder si y est $\mathcal{C}^1$. Pas de problème en dehors de 0. En 0, la continuité est claire. On peut alors montrer que f est dérivable en 0 PUIS que f' est continue, ou encore, utiliser le théorème de la limite de la dérivée, qui permet de conclure en une étape.

Ainsi, toutes les applications décrites précédemment sont effectivement solution : $\mathcal{S}_E$ est de dimension 2 (le lecteur exhibera une base...)

EXEMPLE 12 $(t+1)y' + y = (t+1)\sin t$ *(E)*

Cette fois, on travaille sur $I_1 =]-\infty, -1[$ *et* $I_2 =]-1, +\infty[$. *On trouve*

$$\mathcal{S}_{E,1} = \left\{ t \in I_1 \longmapsto \cos t + \frac{K - \sin t}{t+1} \;\middle|\; K \in \mathbb{R} \right\}$$

et

$$\mathcal{S}_{E,2} = \left\{ t \in I_2 \longmapsto \cos t + \frac{K - \sin t}{t+1} \;\middle|\; K \in \mathbb{R} \right\}$$

Une solution y est (E) sur $\mathbb{R}$ est NECESSAIREMENT de la forme :

$$y \longmapsto \begin{cases} \cos t + \dfrac{K_1 - \sin t}{t+1} & \textit{si } t < -1 \\ 0 & \textit{si } t = -1 \\ \cos t + \dfrac{K_2 - \sin t}{t+1} & \textit{si } t > -1 \end{cases}$$

Reciproquement, si y est de la forme précédente, alors y vérifie clairement (E) sur $\mathbb{R}$. Il reste à regarder si y est $\mathcal{C}^1$ en -1. Déja, la continuité impose d'avoir NECESSAIREMENT $K_1 = K_2 = \sin(-1)$. RECIPROQUEMENT, avec ce choix, on montre que f est de classe $\mathcal{C}^1$. L'utilisation du théorème de la limite de la dérivée est ici très vivement conseillé...

Ainsi, $\mathcal{S}_E$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{S}_E$ est ici un espace vectoriel de dimension... 0 !

3 EDL du second ordre

3.1 Equations homogènes à coefficients constants

Il s'agit d'équations de la forme $y'' + ay' + by = 0$ (H), avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Définition 4
L'équation caractéristique de (H) est : $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ (E).

Remarques 8

- Clairement, si λ est racine de l'équation caractéristique, alors $t \mapsto e^{\lambda t}$ est solution de (H). On vérifie sans mal que si λ est racine double de $X^2 + aX + b$, alors $t \mapsto te^{\lambda t}$ est également solution de (H).
- Si (E) admet deux solutions complexes non réelles, elles sont alors conjuguées (pourquoi ?). Si on les note $\alpha \pm \beta i$, alors $t \mapsto e^{\alpha t} \cos \beta t$ et $t \mapsto e^{\alpha t} \sin \beta t$ constituent deux solutions de (H), qui ont l'avantage d'être réelles.
- Dans les trois cas (racines simples réelles, double réelle, ou conjuguées complexes), on vérifie sans mal que les couples de solutions fournies par les remarques précédentes constituent une famille libre de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Proposition 4 *$\mathcal{S}_H$ est un espace de dimension 2, dont une base est fournie en fonction des racines de l'équation caractéristique, comme ci-dessus.*

Preuve : Voir les remarques précédentes : la seule chose à prouver en plus est que la dimension est égale à 2 : on l'admet ! ■

Exemples 13

- *Une base de solution de $y'' - c^2 y = 0$ sera constituée de $t \mapsto e^{ct}$ et $t \mapsto e^{-ct}$.*
- *Une base de solution de $y'' - 2y' + y = 0$ sera constituée de $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto te^t$.*
- *Une base de solution de $y'' + \omega^2 y = 0$ sera constituée de $t \mapsto \cos \omega t$ et $t \mapsto \sin \omega t$.*

3.2 Seconds membres classiques

A nouveau, il s'agit de second membre de la forme $P(t)e^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Via une superposition, cela couvre le cas des fonctions cos et sin.

Proposition 5 *L'équation $y'' + ay' + by = t^n \exp \lambda t$ admet une solution particulière de la forme $P(t)e^{\lambda t}$, avec P un polynôme de degré n (resp. $n+1$, $n+2$) si λ n'est pas racine de $X^2 + aX + b$ (resp. est racine simple, double).*

Preuve : Méthode de variation de la constante, ou bien méthode algébrique : cf DM sur le sujet... ■

Exemple 14 *$y'' - 4y' + 3y = 3te^t$: le polynôme caractéristique est $X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$, donc une base de $\mathcal{S}_H$ est constituée de $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto e^{3t}$. On cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto (at^2 + bt + c)e^t$: réinjecté dans l'équation, on obtient $-4at + 2(a-b) = 3t$.*

Cette relation devant être valable pour tout t, cela est équivalent à : $a = b = -\dfrac{3}{4}$ (c peut prendre n'importe quelle valeur). Ainsi :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ t \mapsto -\frac{3}{4}(t^2 + t)e^t + K_1 e^t + K_2 e^{3t} \;\middle|\; K_1 ? K_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Maple confirme :

```
> dsolve(D(D(y))(t)-4*D(y)(t)+3*y(t)=3*t*exp(t),y(t));
                  2
  y(t) =(-3/4 t - 3/4 t - 3/8)exp(t) + _C1 exp(t) + _C2 exp(3t)
```

Remarque 9 Les solutions proposées par Maple correspondent bien aux solutions qu'on a trouvées : lorsque K décrit $\mathbb{R}$, $K - \frac{3}{8}$ également... En fait, quand le degré de P passe de n à $n+1$ ou $n+2$, on peut se passer du dernier terme (ou des deux derniers).

3.3 Wronskiens et problèmes de Cauchy

Ce paragraphe n'est pas à proprement parler au programme, mais donne quelques (bonnes) idées qui seront reprises l'année prochaine. L'objet de ce paragraphe est la comparaison des problèmes suivants, concernant deux solutions y_1 et y_2 de $y'' + ay' + by = 0$ (H) :

- y_1 et y_2 sont-elles liées dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?
- A $t_0 \in \mathbb{R}$ fixé, les vecteurs $V_1(t_0) = \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_1'(t_0) \end{pmatrix}$ et $V_2(t_0) = \begin{pmatrix} y_2(t_0) \\ y_2'(t_0) \end{pmatrix}$ sont-ils liés dans $\mathbb{R}^2$?

Clairement, toute CL nulle non triviale de y_1 et y_2 fournit une CL nulle non triviale de $V_1(t_0)$ et $V_2(t_0)$, donc si (y_1, y_2) est liée, alors $\big(V_1(t_0), V_2(t_0)\big)$ l'est pour tout t_0.

La réciproque est nettement moins claire. En fait, on va montrer que si $\big(V_1(t_0), V_2(t_0)\big)$ est liée pour un certain t_0, alors il en est de même de tous les $\big(V_1(t), V_2(t)\big)$, et même : (y_1, y_2) est liée. Le premier point peut être vu comme conséquence du second, mais on le montrera de façon indépendante, car il peut se traiter complètement avec les outils dont on dispose, le second point nécessitant d'admettre un résultat.

La nature du problème conduit à définir le wronskien de deux solutions y_1 et y_2 de (H) : il s'agit de l'application $y_1 y_2' - y_1' y_2$ (qui est nul en t_0 si et seulement si $\big(V_1(t), V_2(t)\big)$ est lié). Attention, y_1 peut s'annuler : w n'est donc pas le numérateur de la dérivée de $\frac{y_2}{y_1}\cdot$ On vérifie sans mal le

Fait 1 $w' = -aw$

D'après les résultats sur les EDL d'ordre 1, on en déduit le

Corollaire 1 *Un wronskien non nul ne s'annulle jamais (ou encore : un wronskien qui s'annule est complètement nul).*

Autrement dit, si $w(0) \neq 0$, alors pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, $w(t_0) \neq 0$ et par suite, les familles $\big(V_1(t_0), V_2(t_0)\big)$ sont libres, donc génératrices de $\mathbb{R}^2$. Notons que tout ceci reste valable dans le cadre d'EDLH à coefficients non constants.

Corollaire 2 *Si (y_1, y_2) est une base de $\mathcal{S}_H$, alors tout problème de Cauchy* $\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta \end{cases}$ *admet une unique solution. On la trouve sous la forme $\lambda y_1 + \mu y_2$ en résolvant le système constitué des deux conditions initiales : il est de Cramer.*

Preuve : Les deux conditions initiales fournissent un système dont le déterminant est $w(t_0)$: il admet donc une unique solution. ■

Remarques 10

- Dans la même idée, on peut noter que si $\big(V_1(t_0), V_2(t_0)\big)$ est lié, et si on note $aV_1(t_0) + bV_2(t_0)$ une CL nulle non triviale, alors $ay_1 + by_2$ est solution au problème de Cauchy $(\mathcal{C}_0)$ $\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(t_0) = y'(t_0) = 0 \end{cases}$ tout comme la fonction nulle : cela impose par unicité $ay_1 + by_2 = 0$, et (y_1, y_2) est liée.
- La seule preuve admise dans cette partie sur les EDL d'ordre 2 est le fait que la dimension de $\mathcal{S}_H$ est ≤ 2. Ce résultat pourrait s'établir en utilisant ce paragraphe et en montrant de façon autonome que la seule solution au problème de Cauchy $(\mathcal{C}_0)$ est la fonction nulle. Une autre façon de faire consiste à poser $z = y'$, ce qui nous ramène à un système linéaire que l'on sait résoudre de façon théorique : cf partie suivante !

Exemple 15 *Voir votre cours de physique !*

4 Systèmes différentiels linéaires

Cette partie n'est pas a proprement parler au programme (en cours), mais c'est une application classique des techniques vues en algèbre linéaire. Il s'agit de résoudre des systèmes différentiels linéaires de la forme :

$$\begin{cases} x'(t) = & ax(t) + by(t) \\ y'(t) = & cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

où x et y sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ que l'on recherche.

Remarque 11 On peut noter que d'éventuelles solutions ont leur dérivées $\mathcal{C}^1$, donc sont $\mathcal{C}^2$, puis $\mathcal{C}^\infty$. Une façon pour résoudre un tel système consiste d'ailleurs à se ramener à une EDL d'ordre 2 vérifiée par x (ou y)...

4.1 Deux premiers exemples (avec l'aide d'un magicien)

Exemple 16 *Le système* $\begin{cases} x' = & y \\ y' = & x \end{cases}$ *peut se résoudre en remarquant qu'en posant miraculeusement* $\alpha = x + y$ *et* $\beta = x - y$*, alors le système est équivalent à* $\alpha' = \alpha$ *et* $\beta' = -\beta$*, donc* α *et* β *sont respectivement de la forme* $t \mapsto K_1 e^t$ *et* $t \mapsto K_2 e^{-t}$*. On en déduit :* $x(t) = \dfrac{1}{2}(K_1 e^t + K_2 e^{-t})$ *et* $y(t) = \dfrac{1}{2}(K_1 e^t - K_2 e^{-t})$*.*

Exemple 17 *Pour le système* $\begin{cases} x' = & 7x - 5y \\ y' = & 10x - 8y \end{cases}$ *on peut noter qu'un nouveau miracle a lieu : si grâce à une géniale intuition on pose* $\alpha = 2x - y$ *et* $\beta = -x + y$*, alors le système est équivalent à* $\alpha' = 2\alpha$ *et* $\beta' = -3\beta$*, donc* α *et* β *sont respectivement de la forme* $t \mapsto K_1 e^{2t}$ *et* $t \mapsto K_2 e^{-3t}$*. On en déduit :* $x(t) = K_1 e^{2t} + K_2 e^{-3t}$ *et* $y(t) = K_1 e^{2t} + 2K_2 e^{-3t}$*.*

4.2 Principe de résolution

Quitte à poser $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, le système se ramène à : $X' = AX$.

L'idée est que si A est diagonale, alors ce n'est pas bien compliqué. A défaut, on peut essayer de trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = D$ soit diagonale (technique usuelle : on cherche des "valeurs propres", puis des "vecteurs propres" associés, etc...). Dans ce cas là, on posant $Y = P^{-1}X$ ("on change les inconnues" : dans l'exemple 16, on avait $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$), on a $Y' = DY$. On en déduit Y, puis $X = PY$.

Remarques 12
- On ne peut pas toujours "diagonaliser" la matrice. Cela dit, on peut toujours se ramener à une forme diagonale sur $\mathbb{C}$ ou triangulaire supérieur sur $\mathbb{R}$ (et la résolution est alors simple). Il est bien clair que ces résultats d'algèbre ne sont pas au programme de sup : on se bornera à constater que sur un certain nombre d'exemples, ça marche bien...
- Notons pour terminer que la résolution de $X' = AX + B$ s'effectue de la même façon : on effectue le changement d'inconnues sans s'occuper de B.

4.3 Un autre exemple

Voir l'exercice correspondant sur la feuille de TD, avec un coup d'œil à la feuille Maple.

5 Au sujet des récurrences linéaires

De même que la fonction `dsolve` de Maple implémente les algorithmes de résolution décrits dans ce chapitre, la fonction `rsolve` permet de trouver toutes les suites vérifiant une relation de récurrence de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{p-1} u_{n+p-1} + b(n),$$

avec les a_i dans $\mathbb{C}$ et $b(n)$ "d'une forme raisonnable", c'est-à-dire essentiellement des combinaisons de $P(n)\lambda^n$, avec $P \in \mathbb{C}[X]$.

Exemple 18 *On cherche les suites complexes vérifiant* $u_{n+3} = -3u_{n+2} + 4u_n + n^2$ *avec* $u_0 = 1$ *et* $u_1 = 0$ *:*

```
> rsolve({u(0)=1,u(1)=0,u(n+3)=-3*u(n+2)+4*u(n)+n},u(n));

<--- Résultat ignoble  --->

> collect(expand("),{u(1),u(2)});
```

$$\Big(-\frac{(-2)^n}{9} + \frac{1}{9} + \frac{(-2)^n n}{6}\Big)u(2) + \frac{13}{27} + \frac{n^2}{18} + \frac{14}{27}(-2)^n - \frac{17}{54}(-2)^n n - \frac{7}{54}n$$

On obtient donc la droite affine $v + \mathbb{C}w$, *avec* $v_n = \dfrac{13}{27} - \dfrac{7}{54}n + \dfrac{n^2}{18} + \dfrac{14}{27}(-2)^n - \dfrac{17}{54}(-2)^n n$ *et* $w_n = \dfrac{1}{9} - \dfrac{(-2)^n}{9} + \dfrac{(-2)^n n}{6}$. *Attention, on est face à un nouveau problème de patates et de boites : ne pas confondre les ensembles et leur contenu...*

On donne ici quelques idées sur la résolution de telles équations :

1. On commence par résoudre l'équation homogène associée (H), c'est-à-dire avec $b(n) = 0$.
2. Le polynôme caractéristique de (H) est $Q = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \cdots - a_1 X - a_0$. Il est clair que si λ est racine de Q, alors la suite géométrique de raison λ est dans $\mathcal{S}_H$. De même, si λ est racine double, alors la suite de terme général $n\lambda^n$ est également dans $\mathcal{S}_H$, etc...
3. On peut montrer que les p (pourquoi p, au fait ?) suites complexes fournies par la phrase précédente forment une famille libre de l'espace $\mathbb{C}^n$ des suites complexes. On le montre en considérant une CL nulle, et en regardant la matrice M associée au système constitué en regardant les p premiers termes de la CL : si les racines sont distinctes, M est tout bêtement une matrice de Vandermonde inversible. Sinon... et bien il faut finasser !
4. $\mathcal{S}_H$ est un espace de dimension p : on le montre par exemple en établissant que l'application $u \in \mathcal{S}_H \mapsto (u_0, \ldots, u_{p-1})$ réalise un isomorphisme de $\mathcal{S}_H$ sur $\mathbb{C}^p$, ce qui revient à montrer que si on fixe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{C}$ ("p valeurs initiales"), alors il existe une unique suite $u \in \mathcal{S}_H$ telle que $u_k = \alpha_k$ pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$. On se souvient que pour les équation différentielles, on avait admis la dimension de $\mathcal{S}_H$ à l'ordre 2...

   En combinant avec ce qui précède, on obtient une base de $\mathcal{S}_H$.
5. Les solutions de l'équation totale (avec b, mais sans condition initiale) forme un espace affine de dimension p. Si $b(n)$ est de la forme $n^k\rho^n$, on en trouve un élément sous une forme $P(n)\rho^n$, avec P de degré k si ρ n'est pas racine du polynôme caractéristique, et $k + m$ s'il est racine de multiplicité m.