Réels - suites

Table des matières

1 Corps des réels **2**
1.1 Présentation de $\mathbb{R}$ . . . 2
1.2 Bornes supérieure et inférieure . . . 2
1.2.1 Définition . . . 2
1.2.2 Une caractérisation importante . . . 3
1.2.3 Intervalles de $\mathbb{R}$ (anecdotique) . . . 4
1.3 Partie entière . . . 4

2 Généralités sur les suites **5**

3 Limite d'une suite **6**
3.1 Convergence d'une suite . . . 6
3.2 Deux premiers résultats . . . 6
3.3 Opérations sur les limites . . . 7
3.4 Limites et inégalités . . . 7
3.5 Divergence vers $+\infty$ . . . 8
3.6 Suites extraites . . . 8

4 Théorèmes de convergence **9**
4.1 Gendarmes . . . 9
4.2 Limite monotone . . . 9
4.3 Suites adjacentes . . . 9

5 Relations de comparaison des suites **10**
5.1 Encore du vocabulaire . . . 10
5.2 Quelques propriétés . . . 10
5.3 Deux non-propriétés . . . 11
5.4 Deux exemples . . . 11
5.5 Suites de référence . . . 12
5.6 Equivalents classiques . . . 12
5.7 Un développement asymptotique . . . 13

6 Extension aux suites complexes **13**
6.1 Convergence d'une suite complexe . . . 13
6.2 Quelques propriétés . . . 13
6.3 Deux exemples . . . 14

1 Corps des réels

1.1 Présentation de $\mathbb{R}$

PROPOSITION 1 *On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{R}$ muni de deux lois de composition interne $+$ et $.$ commutatives, et d'une relation binaire $\leq$ telles que :*

- $(\mathbb{R},+)$ *est un groupe commutatif de neutre 0.*
- $(\mathbb{R}^*,.)$ *est un groupe commutatif de neutre 1.*
- *La loi . est distributive par rapport à $+$.*
- $\leq$ *est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.*
- *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.*

REMARQUES 1

- Les trois premiers points résument les "règles usuelles de calcul dans $\mathbb{R}$" ... Nous reviendrons sur la notion de *groupe* dans un chapitre ultérieur.
- Une relation d'ordre est une relation R *réflexive* (xRx pour tout x), *antisymétrique* (si xRy et yRx, alors $x=y$) et *transitive* (si xRy et yRz, alors xRz). Dire que l'ordre est total signifie que si on prend deux éléments x et y, alors on a xRy ou yRx. Un exemple d'ordre non total sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est l'inclusion (cf. feuille d'exercices).
- Les "bornes supérieures" seront définies dans la deuxième partie.

DÉFINITION 1
Si $x \in \mathbb{R}$, on définit la *valeur absolue* de x par $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$

PROPOSITION 2 *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :*

- $|xy| = |x|\,|y|$ *et si* $y \neq 0$: $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$;
- $|x+y| \leq |x|+|y|$: *c'est L'*inégalité triangulaire*. De plus, il y a égalité si et seulement si x et y sont de même signe (au sens large).*

EXERCICE 1 *Il paraît que les inégalités suivantes, valables pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, sont tout à fait essentielles*[1] *:*

$$|x-y| \leq |x|+|y|, \qquad \big||x|-|y|\big| \leq |x+y|.$$

Le lecteur les établira à titre d'exercice, avant de les oublier bien vite.

REMARQUE 2 En 843, tout ceux qui utiliseront "une inégalité triangulaire" qui n'est pas "**L**'inégalité triangulaire" seront priés de la prouver auparavant. En revanche, le lecteur pourra généraliser l'inégalité triangulaire à $n \geq 2$ réels, en précisant les cas d'égalité.

1.2 Bornes supérieure et inférieure

1.2.1 Définition

DÉFINITION 2
On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est majorée lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que tous les éléments de A sont inférieurs ou égaux à M. On dit alors que M est **UN** majorant de A.

REMARQUE 3 BIEN ENTENDU, il est GROTESQUE de parler DU majorant d'une partie, puisqu'il n'y a JAMAIS unicité d'un éventuel majorant (si M est un majorant, alors $M+1515$ également).

[1] il sera cependant possible de suivre le cours d'analyse de cette année sans connaître celles-ci...

Les définitions et propositions seront systématiquement données dans le cas des bornes *supérieures*. C'est un exercice élémentaire mais important d'écrire les définitions et propositions équivalentes dans le cas des bornes inférieures.

Avant de commencer, il convient de se poser la question suivante :

Quel est le plus grand élément de $\mathbb{R}_*^-$?

Du même type :

EXERCICE 2 *Montrer que l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 1515\}$ est majoré mais n'admet pas de maximum, c'est-à-dire : il n'existe pas de $m \in E$ tel que $m \geq x$ pour tout $x \in E$. Qu'en est-il de $F = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \leq 1515\}$ et $G = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 \leq 1515\}$?*

Ainsi, une partie de $\mathbb{R}$ (même majorée) n'admet pas forcément de maximum ... On va donc introduire la notion de *borne supérieure*. Comme d'habitude, les dessins seront souvent salutaires pour comprendre cette notion.

DÉFINITION 3
Soit X une partie de E. On dit que $S \in \mathbb{R}$ est la[2] borne supérieure de X si et seulement si :

- S est un majorant de X ;
- pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que $S - \varepsilon \leq x$.

REMARQUE 4 On sait (premier résultat de ce chapitre) que toute partie non vide de $\mathbb{R}$ qui est majorée admet une borne supérieure. Cette propriété est en fait *à la base* de la construction de $\mathbb{R}$, largement hors programme, donc admise.

1.2.2 Une caractérisation importante

PROPOSITION 3 *Si X admet S comme borne supérieure, alors S est un majorant de X, et est inférieur ou égal à tous les autres majorants : "S est le plus petit des majorants de X".*

COROLLAIRE 1 *Si X admet une borne supérieure, alors elle est unique (ce qui justifie de parler de LA borne supérieure). On note $\operatorname{Sup} X = S$.*

REMARQUE 5 D'après la définition d'une borne supérieure et la propriété de $\mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ admet une borne supérieure si et seulement si X est majoré. Dans le cas contraire, on note : $\operatorname{Sup} X = +\infty$. Il est alors prudent de changer "toute partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée admet une borne supérieure" en "... admet une borne supérieure FINIE".

Le résultat suivant fournit le cadre le plus simple pour exhiber une borne supérieure.

PROPOSITION 4 *Si X admet un maximum m, alors ce maximum est la borne supérieure de X. Réciproquement, si X admet une borne suupérieure S qui est dans X, alors S est en fait le maximum de X.*

PREUVE : A faire soigneusement ! ■

EXERCICE 3 *Déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants (le cas échéant, signaler s'il s'agit de maxima ou minima) :*

$$\begin{aligned} E_1 = &\quad \left\{1 - \frac{2}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\} \\ E_2 = &\quad \left\{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{N}^*\right\} \\ E_3 = &\quad \left\{1 + \frac{1}{n-m} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{Z},\ n \neq m\right\} \end{aligned}$$

Comparer E_1 et E_2.

[2] on ne peut pas encoreparler de *la* borne supérieure

1.2.3 Intervalles de $\mathbb{R}$ (anecdotique)

Définition 4
Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un ensemble de la forme $[\alpha,\beta]$, $]\gamma,\beta]$, $[\alpha,\delta[$, ou $]\gamma,\delta[$, avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\gamma\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $\delta\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Remarque 6 La signification de ces ensembles est supposée connue ! Par exemple, $]-2,15]$ désigne l'ensemble des $x\in\mathbb{R}$ tels que $-2<x\leq 15$, alors que $]-\infty,1515]$ désigne l'ensemble des réels ≤ 1515, etc... A priori, il est grotesque d'écrire $x>-\infty$...

La définition et la proposition suivante constituent un bon exercice, difficile cependant. Il est inutile d'en lire la preuve avant d'avoir réfléchi soit-même aux problèmes qui se posent.

Définition 5
Une partie X de $\mathbb{R}$ est dite *convexe* si et seulement si pour tout $x,y\in X$ tels que $x,y\in X$, on a $[x,y]\subset X$.

Proposition 5 *Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Preuve : (HP) Déjà, on vérifie soigneusement que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont convexes.

Ensuite, on fixe une partie convexe X de $\mathbb{R}$, et on note $\alpha\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $\beta\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ ses bornes inférieure et supérieure, éventuellement infinies. Il faut alors distinguer bien des cas (ce qui est normal, vu les nombreux types d'intervalles). Si par exemple $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, avec $\alpha\in X$ et $\beta\notin X$, alors on prouve : $X=[\alpha,\beta[\dots$ ■

1.3 Partie entière

Proposition 6 *Pour tout $x\in\mathbb{R}$, il existe un unique $n\in\mathbb{Z}$ tel que $n\leq x<n+1$. On dit que n est la partie entière de x, et on note $n=E(x)$, ou bien $n=\lfloor x\rfloor$ (notation anglo-saxonne).*

Preuve : On fait un dessin. Une propriété issue de la construction de $\mathbb{R}$ (“$\mathbb{R}$ est archimédien”) assure l'existence d'un $p\in\mathbb{N}$ tel que $p>x$. On considère alors p_0 le plus petit de ces p : il vérifie $p_0>x$, et $p_0-1\leq x$ (sans quoi p_0 ne serait pas le plus petit $>x\dots$). L'entier $n=p_0-1$ convient alors.

Pour l'unicité, il suffit de soustraire deux doubles inégalités, pour obtenir un entier strictement compris entre -1 et 1, ce qui lui impose d'être nul... ■

Remarques 7
- Pour montrer que $E(x)=p$, il suffit de montrer que $p\in\mathbb{Z}$ et $x-1<p\leq x$: pourquoi ?
- On définit également $\lceil x\rceil$ le plus petit entier $\geq x$, tel que : $x\leq\lceil x\rceil<x+1$. Pour $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on a $\lceil x\rceil=\lfloor x\rfloor+1$.

Si $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, on a $E(10^nx)\leq 10^nx<E(10^nx)+1$, de sorte que $\dfrac{E(10^nx)}{10^n}\leq x<\dfrac{E(10^nx)+1}{10^n}\cdot$ Si on note $d_n=\dfrac{E(10^nx)}{10^n}$ et $e_n=d_n+\dfrac{1}{10^n}$, on a donc $d_n\leq x<e_n$ avec d_n et e_n deux décimaux tels que e_n-d_n (mais aussi $x-d_n$ et e_n-x) est inférieur ou égal à 10^{-n} : on dit que d_n (resp. e_n) est *l'approximation décimale* de x par défaut (resp. excès) à 10^{-n} près.

Remarque 8 Le point de vue adopté ici permet de “tout faire avec la partie entière”. En fait, l'approximation par excès de x se définit généralement par $\widetilde{e}_n=\dfrac{\lceil 10^nx\rceil}{10^n}$: cette nouvelle définition coïncide avec la précédente lorsque 10^nx est irrationnel ; sinon, $e_n=\widetilde{e}_n+10^{-n}$.

On peut maintenant établir le résultat suivant, qui dit qu'on trouve des rationnels (mais aussi des irrationnels) dans tout intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Ce n'est pas le cas pour les entiers (il n'en n'existe pas dans $[1/3,2/3]\dots$).

EXERCICE 4 Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
Tout intervalle non trivial[3] *de $\mathbb{R}$ contient un rationnel et un irrationnel.*

SOLUTION : Considérons un intervalle non trivial I. Il contient deux éléments distincts α et β (on fait alors un dessin...). Considérons $\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$: on ne sait pas si γ est rationnel ou irrationnel. Par contre, on sait que chaque $\gamma_n = \dfrac{\lfloor 10^n\gamma \rfloor}{10^n}$ est rationnel, avec $\gamma - 10^{-n} \leq \gamma_n < \gamma$. Pour n assez grand, on aura (pourquoi ?) $\gamma_n \in I$, ce qui nous fournit un rationnel dans I.

Pour trouver un irrationel, on va utiliser le :

LEMME 1 $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

PREUVE : Si $\sqrt{2}$ était rationnel, on pourrait écrire $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, avec la fraction "sous forme irréductible", c'est-à-dire "non simplifiable". Maintenant, on peut écrire $p^2 = 2q^2$. p^2 est donc pair, donc p également (pourquoi ?), donc q est impair (pourquoi ?). Mais $p = 2r$, donc $q^2 = 2r^2$ donc q^2 puis q est pair : la fraction $\dfrac{p}{q}$ était en fait simplifiable, et on a notre absurdité. ∎

Une conséquence de ce lemme est que $\dfrac{\sqrt{2}}{10^n}$ est irrationnel, mais également $\lambda_n = \gamma_n + \dfrac{\sqrt{2}}{10^n}$ (pourquoi ?). Or $\lambda_n \in I$ pour n assez grand (pourquoi ?) : c'est gagné ! ∎

2 Généralités sur les suites

On commence par l'un des résultats les plus importants de ce chapitre.

FAIT 1 *80% des âneries que vous avez envie d'énoncer ("Monsieur, est-ce que j'ai le droit de dire que...") seront éliminées après examen de la suite u de terme général $u_n = (-1)^n$.*

On fixe ici quelques notations, définitions, et rappels :

- Une suite réelle est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des suites réelles est donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- Si u est une suite réelle, on note u_n plutôt que $u(n)$. Il convient de distinguer le n-ième terme de la suite u_n et la suite elle-même, que l'on peut noter u, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou encore (u_n).
- Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $u+v$ (resp. uv et λu) désigne la suite dont le n-ième terme vaut $(u+v)_n = u_n+v_n$ (resp. $(uv)_n = u_n v_n$ et $(\lambda u)_n = \lambda u_n$). L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est ainsi muni de deux *lois de composition interne* et d'une *loi de composition externe*[4].
- On note $u \leq v$ lorsque $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il est à noter que si on prend deux suites quelconques, on n'a pas forcément $u \geq v$ ou $u \leq v$. Exemple ?
- Une suite u sera dite *croissante* (resp. *strictement* croissante) lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n < u_{n+1}$). Même chose pour les suites *décroissantes*. Une suite sera dite *monotone* lorsqu'elle est croissante ou décroissante.
  BIEN ENTENDU, une suite n'est pas nécessairement monotone. **On ne verra donc jamais** de raisonnement du type "si la suite était décroissante, on aurait .... contradiction : la suite est donc croissante".
- Une suite u sera dite *majorée* (resp. *minorée*) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ (resp. $u_n \geq M$) pour tout $n \in \mathbb{N}$. M est alors UN majorant (resp. minorant) de (u_n).
  Une suite qui est majorée et minorée est dite *bornée*. Cela revient à dire que $(|u_n|)$ est majorée.

EXERCICE 5 *Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Est-elle totale ?*

[3] c'est-à-dire non réduit à un singleton
[4] Plus tard, nous dirons que muni de ces lois, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une *algèbre*

Exercice 6 *Montrer que u est bornée si et seulement si $|u|$ est majorée. ($|u|$ est par définition la suite telle que $|u|_n = |u_n| \dots$).*

E désigne $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans toute la suite de ce chapitre.

3 Limite d'une suite

3.1 Convergence d'une suite

"On est autorisé à faire des dessins"...

Définition 6

- Si $u \in E$ et $l \in \mathbb{R}$, on dit que u converge vers l (ou bien u_n tend vers l lorsque n tend vers $+\infty$) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geq N, \qquad |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

  On note alors : $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$.
- S'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, alors on dit que u est convergente ; sinon, u est dite divergente.

Exercice 7 *Montrer que la définition précédente est équivalente à :*

$$\forall \varepsilon \in \left]0, \frac{1}{1000!}\right],\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geq N, \qquad |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Proposition 7 (unicité de la limite)

Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l_1$ et $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l_2$, alors $l_1 = l_2$. On peut donc parler de LA limite (éventuelle) d'une suite, et noter $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ pour dire "u admet une limite, qui est l".

Remarques 9

- "Divergente" ne signifie donc pas "tend vers $+\infty$" (d'ailleurs, on ne sait encore pas ce que cela veut dire...)
- Il est aisé de vérifier que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$ si et seulement si $u_n - l \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (le faire tout de même !)

Exercice 8 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$. Montrer que $S = \mathrm{Sup}\, A$ si et seulement si S est un majorant de A et s'il existe une suite à valeurs dans A convergeant vers S.*

3.2 Deux premiers résultats

Théorème 1 *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve : Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $l - 1 \leq u_n \leq l + 1$. Il reste à poser

$$M = \mathrm{Max}\big(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N_0-1}|, |l-1|, |l+1|\big),$$

pour avoir $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

Exercice 9 *(difficile !)*

La réciproque est-elle vraie ?

Le résultat suivant est très utile. Dans les hypothèses, on suppose que l'on a une certaine relation "pour n assez grand", ou bien "à partir d'un certain rang" (APCR) : ce genre de condition arrive souvent quand il s'agit de limites...

Proposition 8 *Si $|u_n| \leq v_n$ à partir d'un certain rang avec $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Preuve : Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$, $|v_n| \leq \varepsilon$. Par ailleurs, il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n| \leq v_n$. Maintenant, si $n \geq \mathrm{Max}(N_0, N_1)$, on aura : $|u_n| \leq v_n \leq \varepsilon$, et c'est gagné. ■

3.3 Opérations sur les limites

THÉORÈME 2 *Soient u et v deux suites réelles tendant respectivement vers l_1 et l_2. Soit également $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*

- $u_n + v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l_1 + l_2$ *;*
- $\lambda u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda l_1$.

PREUVE : On va seulement faire la première preuve. On FIXE pour cela $\varepsilon > 0$. On sait :

$$\forall \rho > 0,\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geq N, \qquad |u_n - l_1| \leq \rho$$

(il ne faut surtout pas utiliser la lettre ε, qui représente une variable qui a été fixée. . .).

En particulier pour $\rho = \dfrac{\varepsilon}{2}$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, on a $l_1 - \dfrac{\varepsilon}{2} \leq u_n \leq l_1 + \dfrac{\varepsilon}{2}\cdot$ De même, il existe N_2 (attention, ce n'est pas forcément le même rang que pour l_1) tel que $l_2 - \dfrac{\varepsilon}{2} \leq v_n \leq l_2 + \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq N_2$. Maintenant, on a $l_1 + l_2 - \varepsilon \leq u_n + v_n \leq l_1 + l_2 + \varepsilon$ pour tout $n \geq \mathrm{Max}(N_1, N_2)$, et c'est gagné. ■

REMARQUES 10

- Ces résultats resteront valables dans $\mathbb{C}$, mais il faut alors utiliser l'inégalité triangulaire plutôt que des encadrements.
- Si au départ on n'avait pas fait attention, et qu'on était parti de $|u_n - l_1| \leq \varepsilon$ et $|v_n - l_2| \leq \varepsilon$, on serait arrivé à $|u_n + v_n - (l_1 + l_2)| \leq 2\varepsilon$. Dans ce cas, la formule magique est "quitte à partir de $\dfrac{\varepsilon}{2}$ plutôt que ε au départ, on serait arrivé à une majoration par ε plutôt que 2ε à l'arrivée".
  De même, si on arrive à une majoration en 1515ε à la fin, c'est gagné tout de même.

THÉORÈME 3 *Soient u et v deux suites réelles tendant respectivement vers l_1 et l_2. Alors :*

- $u_n v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l_1 l_2$ *;*
- *si $l_1 \neq 0$, alors $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, et* $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{l_1}\cdot$

PREUVE : On utilisera le résultat suivant (à savoir montrer, et à retenir) :

LEMME 2 *Si α est bornée et $\beta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\alpha_n \beta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Ensuite, puisque "moralement, u_n vaut à peu près l_1", il est raisonnable d'écrire $u_n v_n = l_1 v_n + (u_n - l_1) v_n$, et on recolle les morceaux.

Pour le deuxième point, on a $\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{l_1} = \dfrac{l_1 - u_n}{u_n l_1}$, de sorte qu'on veut MAJORER $|l_1 - u_n|$ (facile) et MINORER $|l_1 u_n|$, ce qui est peut-être plus délicat. Heureusement, on fait un dessin, et on trouve ainsi le bon argument. . . ■

3.4 Limites et inégalités

THÉORÈME 4 *Si u est une suite à valeurs ≥ 0 qui converge vers l, alors $l \geq 0$.*

PREUVE : Raisonner par l'absurde et faire un dessin. ■

COROLLAIRE 2 *"Passage des inégalités à la limite"*

Si u et v convergent respectivement vers l_1 et l_2 avec $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $l_1 \leq l_2$. On dit qu'on "passe l'inégalité $u_n \leq v_n$ à la limite".

PREUVE : Considérer $v_n - u_n$. ■

Exercice 10 (IMPORTANT)

Le résultat est-il encore vrai si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes ? (preuve ou contre-exemple)

Des résultats du même type que celui qui suit interviennent souvent en analyse.

Proposition 9 *Si $u \in E$ converge vers $l > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$ pour tout $n \geq N$.*

Exercice 11 *Le résultat est-il encore vrai si on remplace les inégalités strictes par des inégalités larges ? (preuve ou contre-exemple)*

3.5 Divergence vers $+\infty$

Définition 7

On dit que $u \in E$ diverge vers $+\infty$ (ou "tend vers $+\infty$") et on note $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ lorsque :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geq N, \qquad u_n \geq M.$$

Exercice 12 *Montrer que la définition précédente est équivalente à :*

$$\forall M \geq 1515,\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geq N, \qquad u_n \geq M.$$

On énonce "en vrac" une série de résultats correspondant à ceux énoncés dans les cas de convergence. Ils sont intuitivement clairs, et leurs preuves sont de bons exercices (lire : "des questions de khôlle faciles").

Proposition 10

- *Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors u n'est pas majorée (mais la réciproque est fausse : donner un contre-exemple).*
- *Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors u_n est divergente (y'a quelque chose à prouver ? Ben oui !)*
- *Si (u_n) est minorée (a fortiori si (u_n) est convergente) et $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $u_n + v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*
- *Si (u_n) est minorée à partir d'un certain rang par $m > 0$ (a fortiori si (u_n) est convergente vers $l > 0$) et $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $u_n v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*
- *Si (u_n) est majorée à partir d'un certain rang par $M < 0$ (a fortiori si (u_n) est convergente vers $l < 0$) et $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $u_n v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.*
- *Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*
- *Si $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0^+$ (ce qui signifie : $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ avec $v_n > 0$ APCR), alors $\dfrac{1}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*

On laisse au lecteur le soin de définir la divergence vers $-\infty$, ainsi que d'énoncer et prouver les résultats analogues à ceux qui précèdent.

3.6 Suites extraites

Définition 8

Une *suite extraite* de $u \in E$ est une suite v dont le terme général est de la forme $v_n = u_{\varphi(n)}$, où φ est une injection croissante de $\mathbb{R}$.

Exemple 1 *En pratique, on rencontrera souvent les extractions $(u_{n+1})_{n\geq 0}$ (suite décalée d'un indice), $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ (termes pairs et impairs d'une suite).*

Remarque 11 **BIEN ENTENDU**, on ne dira jamais "$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$ pour n pair", c'est-à-dire "u converge vers l pour n pair" (la convergence de u vers l ne dépend ni de n, ni de k ni de l'âge du capitaine...).

Lorsqu'une suite converge ou diverge vers $\pm\infty$, on obtient des informations sur TOUTES les suites extraites. A contrario, le comportement de certaines suites extraites peuvent donner des informations (positives ou négatives) quant à la convergence de la suite.

THÉORÈME 5 *Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}}$ et v est extraite de u, alors $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$.*

COROLLAIRE 3 *Si u admet deux suites extraites qui tendent vers deux limites différentes, alors u n'admet pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

EXEMPLE 2 *Pour montrer que la suite u de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$ diverge, on note que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent respectivement vers 1 et -1.*

EXERCICE 13 *Montrer que si $u_{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $u_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$.*

4 Théorèmes de convergence

4.1 Gendarmes

PROPOSITION 11 *Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ APCR avec (u_n) et (w_n) convergentes vers la même limite $l \in \mathbb{R}$, alors (v_n) est également convergente, de limite l.*

REMARQUE 12 Ce résultat s'applique en particulier au cas où l'une des deux suites (u_n) ou (w_n) est constante.

On donne également l'énoncé correspondant à la divergence vers $+\infty$: on a besoin d'un seul gendarme.

PROPOSITION 12 *Si $u_n \leq v_n$ APCR avec $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*

4.2 Limite monotone

THÉORÈME 6 *Soit u une suite réelle croissante. Alors :*
- *ou bien u est majorée, et elle est alors convergente ;*
- *ou bien u diverge vers $+\infty$.*

PREUVE : Dans le premier cas, on montre que u converge vers la borne supérieure S de ses valeurs. ■

REMARQUE 13 En pratique (pour montrer une convergence), on retiendra souvent l'énoncé : "toute suite croissante majorée est convergente". Il faut cependant bien comprendre que le deuxième cas est utile (pour prouver une divergence vers $+\infty$), simple à prouver, mais n'est pas une conséquence immédiate du premier : UNE SUITE QUI NE CONVERGE PAS N'A A PRIORI AUCUNE RAISON DE TENDRE VERS $+\infty$.

EXERCICE 14 *Etudier u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

4.3 Suites adjacentes

THÉORÈME 7 *Soient u et v deux suites réelles telles que :*
- *u est croissante et v décroissante ;*
- *la différence $v - u$ converge vers 0.*

(on dit que u et v sont adjacentes*). Alors u et v convergent vers une limite commune.*

PREUVE : Déjà, $v - u$ est décroissante puis positive (pourquoi ?). Ensuite, u est majorée par... une certaine constante (exemple ? BIEN ENTENDU, v_n n'est pas une constante...), donc converge ; même chose pour v, et on obtient l'égalité des limites en considérant $v_n - u_n$ (préciser !). ■

L'exemple suivant est archi classique. On n'imagine pas qu'un taupin ait pû ne jamais le rencontrer.

EXEMPLE 3 *Si on pose* $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ *et* $T_n = S_n + \frac{1}{n.n!}$, *alors on montre sans mal que les deux suites* S *et* T *sont adjacentes. La limite commune est* e ($\exp(1)$)*, mais c'est une autre histoire...*

Du même tonneau, on a le résultat suivant (dont on peut TOUJOURS se passer à moindre frais)

PROPOSITION 13 *Soit* (I_n) *une suite de* segments emboîtés, *c'est-à-dire d'intervalles* $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$ *tels que* $I_{n+1} \subset I_n$ *pour tout* n, *avec* $\beta_n - \alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. *Alors* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ *est un singleton (en particulier, cette intersection est non vide).*

EXERCICE 15 *On donnera un contre-exemple, dans le cas où on n'impose pas aux* I_n *d'être fermés.*

5 Relations de comparaison des suites

Les suites de terme général $\frac{1}{\ln n}$ et $\frac{1}{n!}$ convergent toutes les deux vers 0, mais “il y en a une qui converge plus vite que l'autre”. A contrario, les suites de terme général $\frac{1}{n^3}$ et $\frac{1}{n^3+1515}$ tendent vers 0 “a peu près à la même vitesse”. On va préciser dans ce chapitre ces deux notions.

5.1 Encore du vocabulaire

DÉFINITION 9

Soient α une suite de réels **non nuls** et u une suite de réels. On dit que :

- u est *négligeable* devant α et on note $u = o(\alpha)$ lorsque $\frac{u_n}{\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$;
- u est *dominée* par α et on note $u = O(\alpha)$ lorsque $\left(\frac{u_n}{\alpha_n}\right)_{n\geq 0}$ est bornée ;
- u est *équivalente* à α et on note $u_n \sim \alpha_n$ lorsque $\frac{u_n}{\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

REMARQUES 14

- Ainsi, il est équivalent de dire “u est bornée” (resp. tend vers 0) est “$u_n = O(1)$” (resp. $u_n = o(1)$).
- $u_n = o(\alpha_n)$ implique évidemment $u_n = O(\alpha_n)$.
- Dans les trois définitions, on peut se contenter que α_n soit non nul APCR.
- Si $u_n \sim \alpha_n$, alors u_n est non nul APCR (pourquoi ?), et $\alpha_n \sim u_n$.
- D'après les définitions, une suite ne sera JAMAIS négligeable devant, dominée par ou équivalente à la suite nulle **BIEN ENTENDU**.
- $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$ (pourquoi ?) ; on note alors : $u_n = v_n + o(v_n)$.

5.2 Quelques propriétés

PROPOSITION 14 Composition des comparaisons

Soient u, v, w *trois suites de réels non nuls :*

- *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* $v_n = o(w_n)$ *alors* $u_n = o(w_n)$.
- *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* $v_n = O(w_n)$ *alors* $u_n = o(w_n)$.
- *Si* $u_n = O(v_n)$ *et* $v_n = o(w_n)$ *alors* $u_n = o(w_n)$.
- *Si* $u_n = O(v_n)$ *et* $v_n = O(w_n)$ *alors* $u_n = O(w_n)$.
- *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* $v_n \sim w_n$ *alors* $u_n = o(w_n)$.
- *Si* $u_n = O(v_n)$ *et* $v_n \sim w_n$ *alors* $u_n = O(w_n)$.

PREUVE : En faire une ou deux ! ■

Proposition 15 Comparaisons de sommes et de produits

Soient u, v, w, z quatre suites de réels (les w_n étant non nuls) :

- *Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n + v_n = o(w_n)$.*
- *Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n + v_n = O(w_n)$.*
- *Si u, v, w, z sont à valeurs non nulles avec $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim z_n$, alors $u_n v_n \sim w_n z_n$ et $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{w_n}{z_n}$.*

Preuve : Idem ! ■

5.3 Deux non-propriétés

Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim z_n$ alors on n'a pas forcément $u_n + w_n \sim v_n + z_n$: par exemple, on peut prendre $u_n = 1 + 1/n$, $v_n = 1$, $w_n = -1$ et $v_n = -1 + 1/n^2$.

Pour résumer (sobrement) :

ON NE SOMME PAS LES EQUIVALENTS

En fait, les soucis arrivent lorsque l'on fait la différence de deux expressions du même ordre. On peut alors s'en sortir grâce à la proposition 15 en sommant des termes négligeables devant une même suite.

Exemple 4 *Si $u_n \sim 2n$ et $v_n \sim 3n$ alors $u_n = 2n + o(n)$ et $v_n = 3n + o(n)$ donc $w_n = 5n + o(n) \sim 5n$.*

Il faut comprendre qu'écrire $\mathrm{e}^{1/n} \sim 1 + \dfrac{2}{n}$ est EXACT (les deux membres sont équivalents à 1), GROTESQUE (puisqu'on a également $\mathrm{e}^{1/n} \sim 1 + \dfrac{1}{n} \sim 1 + \dfrac{1515}{n^{1789}}$: dans un équivalent, il est inutile de mettre deux termes d'ordre différent), mais surtout DANGEREUX, puisqu'on a envie d'en "déduire" $\mathrm{e}^{1/n} - 1 \sim \dfrac{2}{n}$, qui est cette fois une proposition FAUSSE.

Notons également que si $u_n \sim v_n$, on n'a pas forcément $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ (prendre $u_n = n$ et $v_n = n + 1$). Bref :

ON NE PASSE PAS LES EQUIVALENTS A L'EXPONENTIELLE

Remarque 15 Ceux qui veulent passer les équivalents au logarithme sont priés d'attendre un prof plus compréhensif ... En attendant, ils justifieront systématiquement (de façon plus convaincante que par "Ben j'ai vu le résultat dans le Bréal...") . Après une dizaine de justifications, on finit par savoir dans quels cas c'est licite ...

5.4 Deux exemples

Les deux exemples suivants sont très classiques (surtout le second, que tout taupin rencontre fréquemment).

Exercice 16 *On reprend les notations de l'exemple 3. Montrer :*

$$e - S_n \sim \frac{1}{n.n!} \qquad \text{et} \qquad T_n - e \sim \frac{1}{n^3.n!}.$$

Solution : Pour le premier équivalent, on placera sur un dessin u_n, u_{n+1}, v_n et e, ce qui inspirera quelques inégalités... Pour le second, il y aura un peu plus de travail...

Exercice 17 Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$. Montrer que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

PREUVE : On montrera successivement :
- $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante ;
- $I_n \sim I_{n+2}$ (on trouve une relation entre les deux en intégrant deux fois par parties I_n) ;
- $I_n \sim I_{n+1}$ (partir de $I_{n+2}\leq I_{n+1}\leq I_n$) ;
- $(n+1)I_n I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■

COROLLAIRE 4 Equivalent de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

PREUVE : On admet (provisoirement) qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $n! \sim K n^{n-1/2}$, et on calcule K en exprimant les intégrales de Wallis grâce à des factorielles et en utilisant l'équivalent calculé plus haut. ■

5.5 Suites de référence

On va ici comparer les *suites de référence* suivantes, d'abord à l'intérieur d'une même classe, puis entre deux classes : a^n $(a > 0)$, n^α et $(\ln n)^\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, $n!$ et n^n.

PROPOSITION 16
- *Si* $0 < a < b$, *alors* $a^n = o(b^n)$ *;*
- *si* $\alpha_1 < \alpha_2$, *alors* $n^{\alpha_1} = o(n^{\alpha_2})$ *;*
- *si* $\beta_1 < \beta_2$, *alors* $(\ln n)^{\beta_1} = o\big((\ln n)^{\beta_2}\big)$.

PROPOSITION 17 *"Lorsqu'il y a combat, ce sont les exponentielles qui l'emportent sur les polynômes, qui l'emportent eux-même sur les logarithmes" :*

$$a^n \underset{a<1}{\ll} n^\alpha \underset{\alpha<0}{\ll} (\ln n)^\beta \underset{\alpha'>0}{\ll} n^{\alpha'} \underset{b>1}{\ll} b^n \ll n! \ll n^n.$$

On a utilisé ici la notation $u_n \ll v_n$ qui signifie $u_n = o(v_n)$.

On pourra utiliser le résultat suivant, qu'il faut absolument savoir montrer :

LEMME 3 *Si* $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} k \in [0,1[$, *alors* $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

5.6 Equivalents classiques

Les résultats qui suivent seront établis en bonne partie après le cours sur la dérivation. On suppose $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, et on va exprimer (pour certaines fonctions f), $f(u_n)$ comme somme de termes "de plus en plus précis".

Plutôt d'écrire par exemple $\sin u_n - u_n \sim -\dfrac{u_n^3}{6}$, on écrira de préférence $\sin u_n = u_n - \dfrac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$.

p est ici un entier strictement positif FIXE.

PROPOSITION 18
- $(1+u_n)^\alpha = 1 + \alpha u_n + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u_n^2 + \cdots + \dbinom{\alpha}{p} u_n^p + o(u_n^p)$, *où* $\alpha \in \mathbb{R}$, *et* $\dbinom{\alpha}{p} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p+1)}{p!}$ *(généralisation des* C_n^k*).*
- $\dfrac{1}{1-u_n} = 1 + u_n + u_n^2 + \cdots + u_n^p + o(u_n^p)$.

- $e^{u_n} = 1 + u_n + \dfrac{u_n^2}{2!} + \cdots + \dfrac{u_n^p}{p!} + o(u_n^p)$.
- $\ln(1+u_n) = u_n - \dfrac{u_n^2}{2} + \cdots + \dfrac{(-1)^{p-1}u_n^p}{p} + o(u_n^p)$.
- $\sin u_n = u_n - \dfrac{u_n}{3!} + \cdots + \dfrac{(-1)^p}{(2p+1)!}u_n^{2p+1} + o(u_n^{2p+1})$.
- $\cos u_n = 1 - \dfrac{u_n^2}{2!} + \cdots + \dfrac{(-1)^p}{(2p)!}u_n^{2p} + o(u_n^{2p})$.
- $\tan u_n = u_n + \dfrac{1}{3}u_n^3 + \dfrac{2}{15}u_n^5 + o(u_n^6)$.

Exercice 18 **IMPORTANTISSIME**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^n$.

5.7 Un développement asymptotique

Exercice 19 *Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe une unique solution en x de $\tan x = x$ dans l'intervalle $]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$. On la notera x_n.*

Montrer ensuite :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi n} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Solution :

- Pour l'existence, on fera un dessin et on étudiera une bonne fonction sur un bon intervalle.
- $x_n \sim n\pi$ est évident grâce à l'inégalité $n\pi - \pi/2 < x_n < n\pi + \pi/2$ que l'on divise par $n\pi$. On écrit alors $x_n = n\pi + y_n$ avec $y_n \in]-\pi/2, \pi/2[$.
- On réinjecte l'expression précédente dans l'équation $\tan x_n = x_n$ pour obtenir la limite de $\tan y_n$ puis de y_n (soigneusement).
- On continue sur le même principe.

6 Extension aux suites complexes

6.1 Convergence d'une suite complexe

Définition 10

On dit qu'une suite complexe $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geq N, \qquad |z_n - l| \leq \varepsilon.$$

En d'autres termes, la suite complexe (z_n) converge vers l si et seulement si la suite réelle $(|z_n - l|)$ tend vers 0.

Proposition 19 *Si une suite complexe converge vers l_1 et l_2, alors $l_1 = l_2$.*

Il y a donc là encore unicité de la limite.

6.2 Quelques propriétés

Le premier résultat est essentiel : il ramène l'étude d'une suite complexe à celle de deux suites réelles.

Proposition 20 *Si $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, on a $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l_1 + il_2$ si et seulement si $\operatorname{Re} z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l_1$ et $\operatorname{Im} z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l_2$.*

On montre alors facilement les résultats suivants :

Proposition 21

- *Toute suite complexe convergente est bornée (c'est-à-dire : son module est borné).*
- *Si* $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L_1$, $w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L_2$, *et* $\lambda \in \mathbb{C}$, *alors* $\lambda z_n + w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda L_1 + L_2$.
- *Si* $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *et* (w_n) *est bornée, alors* $z_n w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
- *Si* $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L_1$ *et* $w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L_2$ *alors* $z_n w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L_1 L_2$.
- *Si* $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L \neq 0$ *alors* $z_n \neq 0$ *APCR et* $\dfrac{1}{z_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{L}$.

Proposition 22 *Parler d'une suite complexe croissante est grotesque...*

6.3 Deux exemples

L'exercice suivant fournit un générateur d'exercices mystérieux de terminale.

Exercice 20 *Soient* $a, b \in \mathbb{C}$ *et* z *une suite vérifiant* $z_{n+1} = az_n + b$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *(on parle de* suites arithmético-géométrique*).*

En fonction de a, b *et* z_0, *déterminer le comportement de la suite après en avoir calculé le terme général.*

Lorsque $a \neq 1$, *on commencera par montrer qu'il existe un unique* $l \in \mathbb{C}$ *tel que* $l = al + b$. *Ensuite, on considerera* $w_n = z_n - l\dots$

Exemple 5 *Traiter les cas suivants :*

- $z_0 = 2 + i$ *et* $z_{n+1} = (1-i)z_n + i$;
- $z_0 = i$ *et* $z_{n+1} = jz_n + 2i$;
- $z_0 = 3$ *et* $z_{n+1} = \dfrac{z_n}{2} + 3$.

Exercice 21 Suites de Julia-Mandelbrot

Pour $C \in \mathbb{C}$ *fixé, on définit une suite de complexes* $(z_n)_{n\geq 0}$ *par récurrence :* $z_0 = C$, *et* $z_{n+1} = z_n^2 + C$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

- *Si* $|z_{n_0}| > 2$ *et* $|C| \leq 2$ *alors* $|z_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$;
- *si* $|C| > 2$, *montrer que* $|z_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Remarque 16 Dans l'exercice précédent, toute personne fournissant une condition nécessaire et suffisante simple sur C pour que (z_n) converge, accèdera rapidement à la gloire...